



Universidad  
Carlos III de Madrid

# INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL: ELECTRÓNICA INDUSTRIAL

PROYECTO FIN DE CARRERA:

**Gráficos de control no paramétricos  
basados en R-estadísticos con  
aplicación al caso multivariante**

AUTOR: Rubén Darío Loaiza Arbeláez  
TUTOR: Ignacio Cascos Fernández  
AÑO: 2013

**Título:** Gráficos de control no paramétricos basados en R-estadísticos con aplicación al caso multivariante.

**Autor:** Rubén Darío Loaiza Arbeláez

**Tutor:** Ignacio Cascos Fernández

## EL TRIBUNAL

Presidente: .....

Vocal: .....

Secretario: .....

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de carrera el día 17 de Diciembre de 2013 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia su esfuerzo durante todos estos años de estudio y su apoyo incondicional en todas las iniciativas que he tomado.

Me gustaría agradecer también la ayuda de mi tutor Ignacio Cascos Fernández en la realización y materialización de este proyecto y sobre todo por la infinita paciencia que ha tenido conmigo.

# Resumen

Este proyecto propone la implementación de varios gráficos de control para procesos industriales. Se hace énfasis en los gráficos de control no paramétricos basados en rangos ordinales, tanto univariantes como multivariantes propuestos por Liu [3]. Se desarrollarán a través de la implementación de los distintos códigos necesarios para la construcción de los gráficos de control mediante el uso del lenguaje de programación R.

Se comparan los gráficos de control clásicos propuestos por Shewhart y los gráficos de control no paramétricos basados en rangos ordinales de Liu y también gráficas de operación características (OC) de cada uno de ellos.

**Palabras clave:** Control, rangos, Shewhart, Liu, OC.



# Índice de contenidos

|   | Página |
|---|--------|
| <b>Capítulo 1: Introducción y objetivos</b> .....   | 1      |
| 1.1. Introducción y objetivos.....  | 2      |
| 1.2. Estructura del documento.....  | 3      |
| <b>Capítulo 2: Conceptos básicos en el control de procesos</b> .....                                      | 5      |
| 2.1. Calidad: definición y breve reseña histórica.....  | 6      |
| 2.2. Control estadístico de procesos.....   | 7      |
| 2.3. Gráficos de control.....   | 8      |
| <b>Capítulo 3: Gráficos de control clásicos</b> .....   | 10     |
| 3.1. Gráficos de control clásicos.....  | 11     |
| 3.2. Gráfico de control para $\bar{x}$ y $R$ .....  | 13     |
| 3.3. Gráfico de control $X$ para mediciones individuales.....   | 20     |
| 3.4. Gráfico de control para $\bar{x}$ y $S$ .....  | 22     |
| 3.5. Gráfico de control CUSUM.....  | 24     |
| 3.5.1. Gráfico de control CUSUM tabular.....  | 25     |
| 3.6. Curvas OC para gráficos de control clásicos.....   | 27     |
| 3.6.1. Curva OC para el gráfico de control $\bar{X}$ .....  | 27     |
| 3.6.2. Curva OC para el gráfico de control $R$ .....  | 28     |
| <b>Capítulo 4: Gráficos de control basados en rangos</b> .....  | 30     |
| 4.1. Gráficos de control basados en rangos.....   | 31     |
| 4.2. Gráfico de control $r$ .....   | 31     |
| 4.3. Gráfico de control $Q$ .....   | 33     |
| 4.4. Gráfico de control $S$ y $S^*$ .....   | 35     |
| 4.5. Comparativa entre el gráfico de control clásico para la media y el gráfico de control $Q$ .....      | 37     |
| 4.6. Comparativa entre el gráfico de control clásico $X$ y el gráfico de control no paramétrico $r$ ..... | 39     |
| <b>Capítulo 5: Gráficos de control multivariantes</b> .....   | 41     |
| 5.1. Profundidad de datos.....  | 42     |
| 5.2. Rango multivariante.....   | 44     |
| 5.3. Gráfico de control multivariante $r$ .....   | 45     |
| 5.4. Gráfico de control multivariante $Q$ .....   | 46     |
| 5.5. Gráfico de control multivariante $S$ y $S^*$ .....   | 47     |
| 5.6. Gráfico de control $T^2$ de Hotelling.....   | 52     |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.6.1. Mediciones individuales.....   | 52        |
| 5.6.2. Datos subagrupados.....  | 53        |
| 5.7. Comparativa entre el gráfico $T^2$ de Hotelling y el gráfico $r$ ..... | 55        |
| <b>Capítulo 6: Memoria económica.....</b>                                   | <b>57</b> |
| <b>Capítulo 7: Conclusiones.....</b>  | <b>59</b> |
| 7.1. Conclusiones.....  | 60        |
| <b>Referencias.....</b>   | <b>62</b> |
| Referencias.....  | 63        |
| <b>Anexos .....</b>   | <b>65</b> |
| Anexo I: Tabla de constantes de gráficos control.....                       | 66        |
| Anexo II: Resumen funciones para la implementación en R.....                | 67        |
| Anexo III: Código en R de los gráficos de control.....                      | 71        |
| Anexo IV: Datos para la simulación.....                                     | 99        |
| Anexo V: Curva OC para $S$ .....  | 102       |

# Índice de figuras

|  | Página |
|--|--------|
| Figura 1: Gráfico de control para $R$ .....  | 16     |
| Figura 2: Gráfico de control para $\bar{X}$ .....  | 17     |
| Figura 3: Gráfico de control para $R$ , Fase II.....   | 18     |
| Figura 4: Gráfico de control para la media, Fase II.....   | 19     |
| Figura 5: Gráfico de control para mediciones individuales.....   | 21     |
| Figura 6: Gráfico de control para $S$ .....  | 23     |
| Figura 7: Gráfico de control para $\bar{X}$ .....  | 23     |
| Figura 8: Gráfico de sumas acumuladas.....   | 24     |
| Figura 9: Gráfico de control Cusum superior.....   | 26     |
| Figura 10: Gráfico de control Cusum inferior.....  | 26     |
| Figura 11: Curva OC para el gráfico de control $\bar{X}$ .....   | 28     |
| Figura 12: Curva OC para el gráfico de control $R$ .....   | 29     |
| Figura 13: Gráfico de control $r$ .....  | 32     |
| Figura 14: Gráfico de control $Q$ .....  | 34     |
| Figura 15: Gráfico de control $S^*$ .....  | 36     |
| Figura 16: Comparativa entre el gráfico de control para la media de Shewhart y el gráfico Q de Liu. Distribución normal.....       | 38     |
| Figura 17: Comparativa entre el gráfico de control para la media de Shewhart y el gráfico Q de Liu. Distribución exponencial.....  | 38     |
| Figura 18: Comparativa entre el gráfico de control X de Shewhart y el gráfico de control $r$ de Liu. Distribución normal.....      | 40     |
| Figura 19: Comparativa entre el gráfico de control X de Shewhart y el gráfico de control $r$ de Liu. Distribución exponencial..... | 40     |
| Figura 20: Gráfico de control multivariante $r$ .....  | 49     |
| Figura 21: Gráfico de control multivariante $Q$ ( $n=4$ ).....   | 49     |
| Figura 22: Gráfico de control multivariante $Q$ ( $n=10$ ).....  | 50     |
| Figura 23: Gráfico de control multivariante $S^*$ .....  | 50     |
| Figura 24: Gráfico de control multivariante $Q$ ( $n=4$ ). Tukey.....  | 51     |
| Figura 25: Gráfico de control multivariante $Q$ ( $n=4$ ). Liu.....  | 52     |
| Figura 26: Gráfico de control $T^2$ de Hotelling.....  | 54     |
| Figura 27: Gráfico de control $r$ . Comparativa con $T^2$ .....  | 56     |
| Figura 28: Gráfica de control $T^2$ de Hotelling. Comparativa con $r$ .....  | 56     |
| Figura 29: Curva OC para el gráfico de control $S$ .....   | 102    |



# Índice de tablas

|  | <b>Página</b> |
|--|---------------|
| Tabla 1: Comparativa entre profundidades.....  | 44            |
| Tabla 2: Resumen funciones para la representación de las gráficas de control en R..... | 67            |





# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

Esta sección tiene el objetivo de presentar una visión global sobre el proyecto realizado, así como de indicar las motivaciones y metas por las que se ha decidido realizar este proyecto. También se realiza un resumen del contenido de los diferentes capítulos del documento.

## 1.1. Introducción y objetivos

El desarrollo de este proyecto se centra en la realización del software necesario para la representación e implementación de los gráficos de control clásicos propuestos por Shewhart [1] y los gráficos de control no paramétricos basados en rangos ordinales realizados por Liu [3], mediante el uso del programa estadístico de libre distribución R ([6],[7] y [8]).

Se ha elegido R debido a que proporciona un amplio abanico de herramientas estadísticas y gráficas, permitiendo así generar gráficos con alta calidad. En R podemos encontrar el paquete estadístico para gráficos de control *qcc* [13], que permite la elaboración de gráficos de control clásicos pero no contempla la implementación de los gráficos de control no paramétricos basados en rangos, por lo que es importante el desarrollo de un software capaz de realizarlos.

La estadística no paramétrica es el conjunto de técnicas estadísticas que no se basan en ninguna presuposición sobre los datos de partida. De este modo, las técnicas no paramétricas pueden aplicarse con datos que tengan cualquier distribución. Esto es importante debido a que las gráficas de control clásicas están desarrolladas bajo el supuesto de normalidad en las variables estudiadas, lo cual no siempre sucede. Las gráficas de control propuestas por Liu, en cambio, sirven para cualquier distribución de partida en la población.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un código en R que permita la representación y el estudio de las gráficas de control basadas en rangos ordinales, R-estadísticos, tanto univariantes como multivariantes.

Los R-estadísticos son transformaciones de rangos ordinales que nos permiten obtener un orden de todas las observaciones dentro de una muestra estudiada.

En el caso multivariante existen métodos para construir gráficos de control, pero su uso está restringido al caso de la distribución normal y son difíciles de visualizar e interpretar. Dentro de las investigaciones en el campo del control multivariado, se ha encontrado que cuando las variables a controlar no pueden modelarse razonablemente mediante una distribución normal multivariada, las gráficas de control no paramétricas basadas en rangos multivariantes son eficientes por lo que es importante un estudio que facilite la implementación y representación de dichas gráficas de control.

## 1.2. Estructura del documento

Este apartado está destinado a explicar brevemente la estructura de este documento y sus contenidos

### *Capítulo 2:*

En esta sección se realiza una pequeña introducción explicando los conceptos clave a partir de los cuales se desarrolla la teoría del control estadístico de procesos.

### *Capítulo 3:*

Este capítulo tiene como objetivo el desarrollo de los conceptos básicos sobre gráficos de control y además la implementación de ellos a través del software libre de programación R para el análisis estadístico y gráfico.

Se presentan los gráficos de control de Shewhart para mediciones individuales ( $\bar{X}$ ), la media y  $R$ , la media y  $S$  y además el gráfico CUSUM (suma acumulada). Además se realiza una breve comparativa entre gráficos a través de la curva característica de operación para cada uno de los gráficos de control clásicos.

### *Capítulo 4:*

Gráficos de control basados en rangos es el capítulo principal de este documento. En él se define el concepto de rango como una medida de centralidad, se explican los principales gráficos de control desarrollados por Liu ( $r$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$ ) y se implementan mediante el uso del programa estadístico R. Además se realiza una breve comparativa entre la eficiencia y eficacia de los gráficos de control  $Q$  y  $r$ .

*Capítulo 5:*

En esta sección se procede a la implementación de los gráficos de control  $r$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$  pero aplicados al caso multivariante. Además se desarrolla el concepto de profundidad de datos que es un sistema de clasificación por rangos usado para determinar si una observación es diferente de aquellas que conforman el conjunto original y en el cual se basa la construcción de los gráficos de control propuestos por Regina Liu en el caso multivariante. Además se hace una comparativa entre el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling y los gráficos de control basados en rangos. Para finalizar se realiza una comparativa en el uso de las diferentes definiciones de profundidad aportadas por Liu, Tukey y Mahalanobis, ver [4]

*Capítulo 6:*

En la memoria económica se realiza un análisis del tiempo empleado en el desarrollo de este proyecto y del valor monetario que éste tendría en el mercado laboral.

*Capítulo 7:*

Este capítulo contiene una visión personal acerca de las conclusiones obtenidas y objetivos conseguidos tras la elaboración de este proyecto.

*Referencias:*

Bibliografía empleada en el desarrollo del proyecto.

*Anexos:*

En esta sección se presentan los diferentes anexos necesarios para completar el desarrollo de este trabajo. En el Anexo I se incluye una tabla de constantes necesarias para la realización de los diferentes gráficos de control clásicos y en el Anexo II se da a conocer el código utilizado para la implementación de los gráficos de control  $X$ ,  $\bar{X}$ ,  $R$ ,  $CUSUM$ ,  $r$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$ . Para finalizar, en el Anexo III vienen incluidos algunos datos ejemplo que se puede utilizar para la realización de los gráficos de control.



## Capítulo 2

# Conceptos básicos en el control de procesos

En esta sección se realiza una pequeña introducción explicando los conceptos clave a partir de los cuales se desarrolla la teoría del control estadístico de procesos.

## 2.1. Calidad

Aunque el concepto de calidad suele estar relacionado a un contexto moderno, la calidad es un término que aparece continuamente en el campo de los procesos industriales ya que siempre ha formado parte de todos los productos y servicios a lo largo de la historia.

En un proceso industrial la fabricación de dos productos está condicionada a la presencia de diferentes factores, por lo que es difícil que éstos sean exactamente iguales, debido a que las características del producto fabricado no son uniformes ya que siempre hay presente cierto grado de variabilidad.

Con la finalidad de hacer que esta variabilidad sea lo más reducida posible o al menos hacer que se mantenga entre ciertos límites, surge el concepto de calidad como una rama importante del proceso de fabricación de productos.

Se define calidad como adecuación para uso (calidad de diseño y calidad de conformidad). Ésta es inversamente proporcional a la variabilidad y el objetivo principal es intentar reducir la variabilidad en procesos y productos a través de la mejora de la calidad.

El concepto de calidad se relaciona con una o más características deseables que debería poseer un producto o servicio. Es uno de los factores de decisión más importantes y por lo tanto entender y mejorar la calidad es un factor clave que lleva al éxito en los negocios, al crecimiento y a una posición competitiva fortalecida.



## 2.2. Control estadístico de procesos

A lo largo de la historia, el hombre siempre ha tenido gran interés en el desarrollo de herramientas que le permitiesen mejorar la calidad de los procesos productivos.

En 1924, Walter A. Shewhart de Bell Telephone Laboratories desarrolló el concepto de gráfico de control estadístico, el cual suele considerarse como el inicio formal del control estadístico de procesos (SPC).

El control estadístico de procesos [11] es un poderoso conjunto de herramientas utilizadas para resolver problemas, muy útil para conseguir la estabilidad y mejorar la capacidad del mismo proceso mediante la reducción de la variabilidad. El SPC se puede aplicar a cualquier proceso. Sus siete herramientas principales son:

- El histograma o el diagrama de tallo y hoja
- La hoja de verificación
- La gráfica de Pareto.
- El diagrama de causa y efecto.
- El diagrama de concentración de defectos.
- El diagrama de dispersión.
- La gráfica de control.

El desarrollo de este proyecto se centra sobre todo en el control estadístico de procesos mediante las gráficas de control.

Los procesos industriales están afectados por un gran número de factores sometidos a una variabilidad (por ejemplo oscilaciones en las características del material utilizado, cambios de temperatura, el error intrínseco asociado a las máquinas utilizadas durante el proceso, la humedad, etc.) que inciden en él e inducen en la variabilidad del producto fabricado.

Existen dos tipos de causas que producen variabilidad en el proceso productivo: asignables y no asignables.

Las **causas asignables** son aquellas que pueden ser identificadas y que conviene descubrir y eliminar, por ejemplo, un fallo de la máquina por desgaste de una pieza, un cambio muy notorio en la calidad del plástico, etc. Estas causas provocan que el proceso no funcione como se desea y por lo tanto es necesario eliminarla para así poder retornar a un funcionamiento correcto en el proceso.

Las **causas no asignables** son una multitud de causas no identificadas, ya sea por falta de medios técnicos o porque no es económico hacerlo, cada una de las cuales ejerce un pequeño efecto en la variación total. Son inherentes al proceso mismo y no pueden ser reducidas o eliminadas al menos que se modifique el proceso.

Se dice que un proceso está **bajo control** estadístico cuando no hay causas asignables presentes y en caso contrario se dice que está **fuera de control**. El control estadístico de procesos se basa en analizar si existe una gran variabilidad en algunas de las características de los productos fabricados a través, generalmente, de la construcción de gráficos de control.

Si el proceso opera de manera de que existan pequeñas oscilaciones de todos los factores pero de forma tal que ninguno de ellos afecte de forma ponderante el producto fabricado se distribuye de acuerdo con una ley normal, y si por el contrario uno de dichos factores afecta de una forma más predominante en la fabricación el producto fabricado no tiene porque seguir una ley de distribución normal.

### 2.3. Gráficos de control

Un gráfico de control es un gráfico en el que se hace corresponder un punto a cada uno de los valores de un estadístico calculados sobre muestras sucesivas en general del mismo tamaño, tomadas durante la fabricación.

La finalidad de los gráficos de control es monitorizar un proceso industrial para controlar su buen funcionamiento y detectar de la forma más rápida posible cualquier anomalía, ya que ningún proceso se encuentra de forma espontánea bajo control y conseguir y mantener esto supone llegar al éxito.

El control estadístico de procesos, mediante los gráficos de control, tiene como objetivos:

- Asegurar y mantener el proceso bajo control, detectando las causas asignables.
- Estimar los parámetros del proceso.
- Aprender sobre el proceso, de forma que se puedan identificar que causas asignables influyen sobre su medida así como su variabilidad.
- Medir los efectos de las causas asignables y aprender a corregirlas y evitarlas.
- Servir como herramienta para mejorar el proceso. Reduciendo la variabilidad y aumentando la capacidad.

Los gráficos de control son una herramienta contrastada para mejorar la productividad, ya que al reducir el rechazo y la reelaboración los costos disminuyen y la capacidad de producción aumenta. Por otra parte, son eficaces para evitar defectos preventivamente, manteniendo el proceso bajo control durante una etapa de fabricación, lo que evita el coste de separar los artículos correctos de los defectuosos después de su fabricación.

Además, los gráficos de control evitan ajustes innecesarios al proceso derivados de posibles variaciones anormales, ilusorias que realmente no lo sean. También proporcionan información para el análisis, ya que a menudo el patrón de los puntos en el gráfico de control contiene información diagnóstica para un operario o ingeniero con experiencia, información que permite implementar un cambio en el proceso que mejore su rendimiento.

Los gráficos de control se encuentran entre los medios de control operativo más importantes. Tienen tanta importancia como los controles de costos y materiales. La tecnología moderna de los ordenadores ha facilitado la implementación de las gráficas de control para cualquier tipo de proceso, ya que es posible obtener y analizar los datos en tiempo real y en línea en el centro de trabajo.

En mayoría de las aplicaciones se utiliza para la vigilancia de proceso en línea, es decir, se obtienen datos muestrales de una característica de calidad  $X$ , para diferentes muestras y éstos se usan para elaborar un diagrama de control, de tal modo que si los valores de las medias de las muestras de  $X$  se hallan entre los límites de control y no muestran ningún patrón sistemático, se dice que el proceso está bajo control, así como si futuros subgrupos de este proceso indican control estadístico.

Los primeros gráficos de control propuestos por Shewhart fueron para monitorizar el promedio ( $\bar{x}$ ) y la variabilidad ( $R$  o  $S$ ) aplicables a variables cuantitativas. Este tipo de gráficos pertenecen al control univariante para variables cuantitativas y cualitativas.

# Capítulo 3

## Gráficos de control clásicos

Este capítulo tiene como objetivo el desarrollo de los conceptos básicos sobre gráficos de control y además la implementación de ellos a través del software libre de programación R para el análisis estadístico y gráfico.

Se presentan los gráficos de control de Shewhart para mediciones individuales ( $\bar{X}$ ), la media y  $R$ , la media y  $S$  y además el gráfico CUSUM (suma acumulada). Además se realiza una breve comparativa entre gráficos a través de la curva característica de operación para cada uno de los gráficos de control clásicos.

### 3.1. Gráficos de control clásicos

Los gráficos de control son la herramienta clave en el control estadístico de procesos ya que gracias a ellos podemos detectar cambios importantes en el proceso o la aparición de salidas de control. En el gráfico se va representando de forma correlativa los valores muestrales con objeto de poder monitorizar el proceso.

Representan la evolución en el tiempo de alguna variable del proceso o variable de calidad. Para ello se representa una línea central que representa el valor promedio de la variable y también otras dos líneas llamadas límite de control superior (LCS) y límite de control inferior (LCI). Éstos se eligen de tal forma que si un proceso está bajo control, la mayoría de los valores de las muestras estén entre ellos. Cuando algún valor está por encima del LCS o del LCI se dice que el proceso está fuera de control para ese instante o ese lote. Si esto ocurre, es recomendable llevar a cabo una investigación para encontrar y eliminar si es posible la causa de este comportamiento indeseado. Se acostumbra unir los valores representados mediante líneas poligonales para poder visualizar con mayor facilidad la salida de los límites de control o la presencia anómala de secuencias no aleatorias. Aunque en un proceso todos los valores estén entre los límites de control inferior y superior pueden existir puntos o valores que indiquen la presencia de alguna alteración en el proceso.

Cuando el proceso está bajo control todos los puntos representados en el gráfico deben tener un patrón aleatorio. Supongamos que  $w$  es un estadístico que mide una característica del proceso, donde  $\mu_w$  es la media y  $\sigma_w$  es su desviación típica. En este caso la línea central y los límites de control serán

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu_w + L \sigma_w \\ \text{Línea central} &= \mu_w \\ \text{LCI} &= \mu_w - L \sigma_w \end{aligned}$ |
|---|

Donde  $L$  es la distancia entre la línea central y los límites de control expresado en unidades de la desviación típica.

Para saber si un proceso está dentro o no de los límites de control se puede definir como un contraste de hipótesis estadística, donde  $H_0$  es asumida como correcta. En el caso de control de calidad la hipótesis nula sería suponer que el proceso está bajo control en cada una de las muestras seleccionadas. Si rechazamos  $H_0$  entonces estamos dando como correcta la hipótesis alternativa  $H_1$ . Un punto que esté fuera de los límites de control puede interpretarse como aceptación de  $H_1$  y por lo tanto el proceso ha salido de control. En un contraste de hipótesis a la decisión de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es cierta se la denomina error de tipo I ( $\alpha$ ) el cual suele fijarse en 0.0027 (error del vendedor) mientras que el error cometido al no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa se la denomina riesgo del comprador (error de tipo II ( $\beta$ ))

$H_0$ : Proceso bajo control  
 $H_1$ : Proceso fuera de control

La selección de los límites de control es una de las decisiones más importantes que deben hacerse a la hora de diseñar un gráfico de control. Si los límites de control se alejan de la línea central se reduce el riesgo de un error de tipo I, sin embargo, al mismo tiempo se incrementa la probabilidad de un error de tipo II.

En general para interpretar los patrones de un gráfico de control existen algunas pautas:

- *Tendencia*: cambio a largo plazo que se produce en relación al nivel medio o el cambio a largo plazo de la media
- *Periodicidad*: repeticiones cíclicas de alguna de las gráficas de control
- *Inestabilidad*: presencia de algunas fluctuaciones que en ocasiones puede provocar que algún valor caiga fuera de los límites de control.
- *Sobrestabilidad*: se da cuando la variabilidad es menor que la esperada

Existen diferentes criterios (reglas) para analizar los gráficos de control con los cuales sabremos si existe alguna salida de control:

- Un punto cae fuera de los límites 3 sigma
- Dos de tres puntos caen fuera de los límites dos sigma
- Cuatro de cinco puntos consecutivos se encuentran a una distancia de un sigma o más de la línea central.
- Ocho puntos consecutivos se encuentran al mismo lado de la línea central.

### 3.2. Gráfico de control para $\bar{x}$ y R

El gráfico de control para la media, también llamado gráfico  $\bar{X}$ , recoge la evolución de la media muestral, en muestras de tamaño  $n$ , de la característica de calidad de interés.

Si suponemos que la variable  $X$  sigue una distribución normal, su media muestral también lo será. Si no sigue una distribución normal pero el valor de  $n$  es elevado, podemos aproximarla a través del teorema central del límite haciendo que  $X$  sea aproximadamente normal.

Si son conocidas la media y la varianza de una cierta característica y tomamos una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de tamaño  $n$  el promedio de la muestra será:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

y por lo tanto  $\bar{x}$  sigue una distribución normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  con lo cual tenemos que los límites de control para las medias muestrales es:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$ |
|---|

Se acostumbra sustituir  $z_{\alpha/2}$  con 3 como valor fijo que corresponde a un valor aproximado de  $\alpha = 0.0027$ , a fin de trabajar con límites tres sigma. El valor de  $z_{\alpha/2}$  se puede estimar según la probabilidad bajo la cual se quiera trabajar, siendo esta  $1 - \alpha$ .

En la práctica, generalmente no se conocen los valores de la media y de la desviación estándar. Por lo tanto se han de estimar a partir de muestras tomadas cuando se considera que el proceso está bajo control. Esta estimación se realiza basándose en al menos 20 o 25 muestras,  $m$ , donde cada una de ellas contiene  $n$  observaciones (normalmente entre 4 y 6).

Para poder estimar  $\mu$  realizamos el promedio de las medias de las observaciones

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$$

En la estimación de la desviación estándar se realiza a partir de los rangos de las  $m$  muestras. El rango de una muestra es la diferencia entre las observaciones menor y mayor. La desviación estándar la podemos aproximar como el rango promedio:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Una vez realizadas estas estimaciones los límites de control del gráfico de control para  $\bar{x}$  son:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCI} &= \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \end{aligned}$ |
|---|

El valor de los coeficientes  $A_i$  vienen prefijados para  $\alpha=0.0027$ , valor para el cual  $z_{\alpha/2}$  vale 3. Se puede tomar otro valor de significación  $\alpha$ .

La línea central y los límites de control de la cara R son los siguientes:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= D_4 \bar{R} \\ \text{Línea central} &= \bar{R} \\ \text{LCI} &= D_3 \bar{R} \end{aligned}$ |
|---|

Los valores de  $A_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  y  $d_2$  vienen tabulados según el tamaño de la muestra en la tabla I del anexo I.

Para determinar si un proceso está o no bajo control conviene utilizar los dos gráficos de control conjuntamente:



1. Se construye el gráfico de rangos para comprobar si la variación del proceso está bajo control.
2. Una vez que la dispersión está en control estadístico se construye el gráfico de control de medias.
3. Si los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son desconocidos, se estiman a partir de la información muestral. Para llegar a las estimaciones definitivas, se realizan los cambios oportunos, se eliminan los posibles puntos que estén fuera de control y se recalculan los límites hasta conseguir que el proceso esté bajo control.

A continuación se representa un gráfico de control para R y la media.

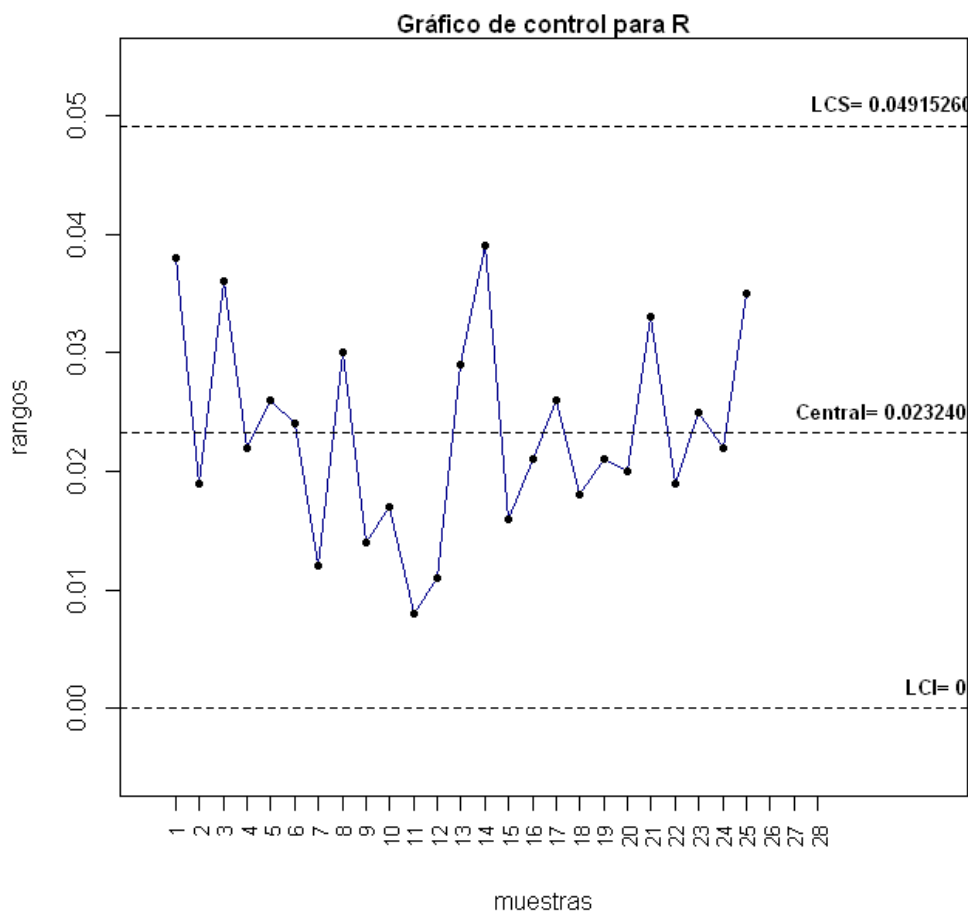
*Ejemplo.- Para realizar el ejemplo se utilizan los datos de la página 213[2] para la Fase I y de la página 219[2] para la Fase II.*

#### *Fase I*

Ya que los límites de control para la media dependen de la variabilidad del proceso, empezaremos con el gráfico de control para R.

Como se tratan de muestras de tamaño 5, los valores de los parámetros tabulados en la tabla I del Anexo I son  $A_2=0.577$ ,  $D_3= 0$  y  $D_4=2.115$ . Los valores de los límites de control para este tamaño muestral se pueden observar en la *Figura 1*.

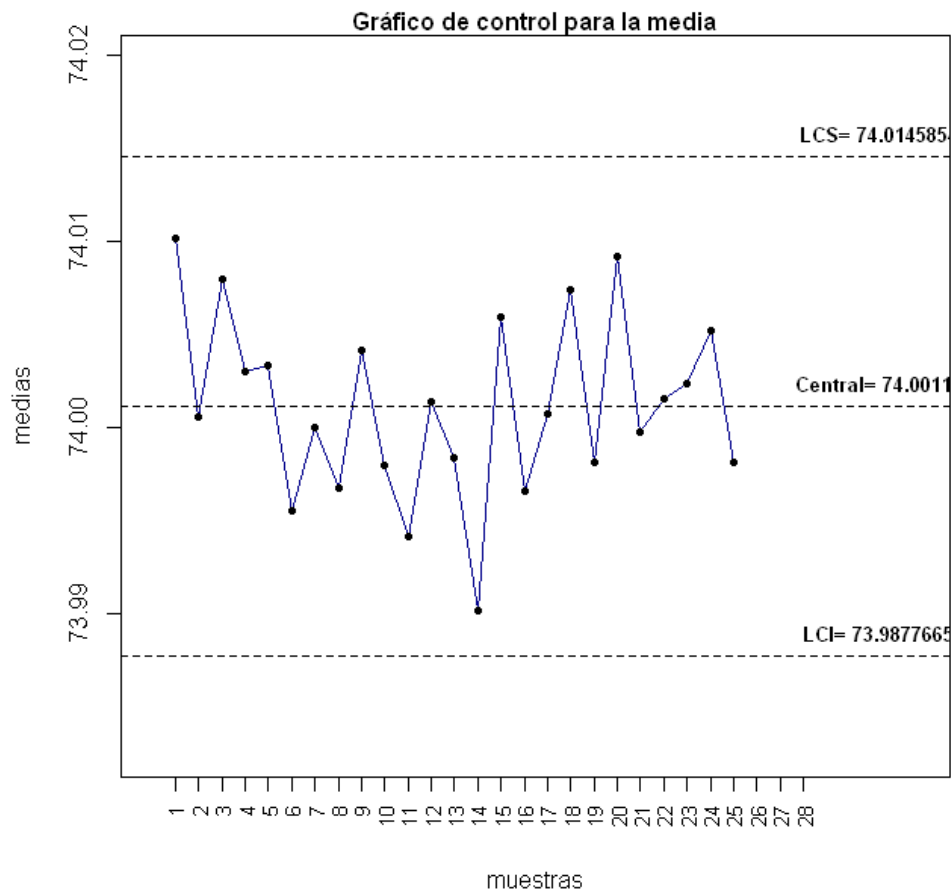
A continuación en la siguiente figura se muestra el gráfico de control para R:



*Comando:* graf.control.R (x,n=5,alfa=0.0027)

*Figura 1:* “Gráfica de control para R”

Podemos observar en la gráfica anterior que no existen indicios de que alguna de las muestras esté fuera de control y por lo tanto indica que la variabilidad del proceso está bajo control. A continuación construimos el gráfico de control para la media teniendo en cuenta el valor de  $A_2$  para  $n=5$ .



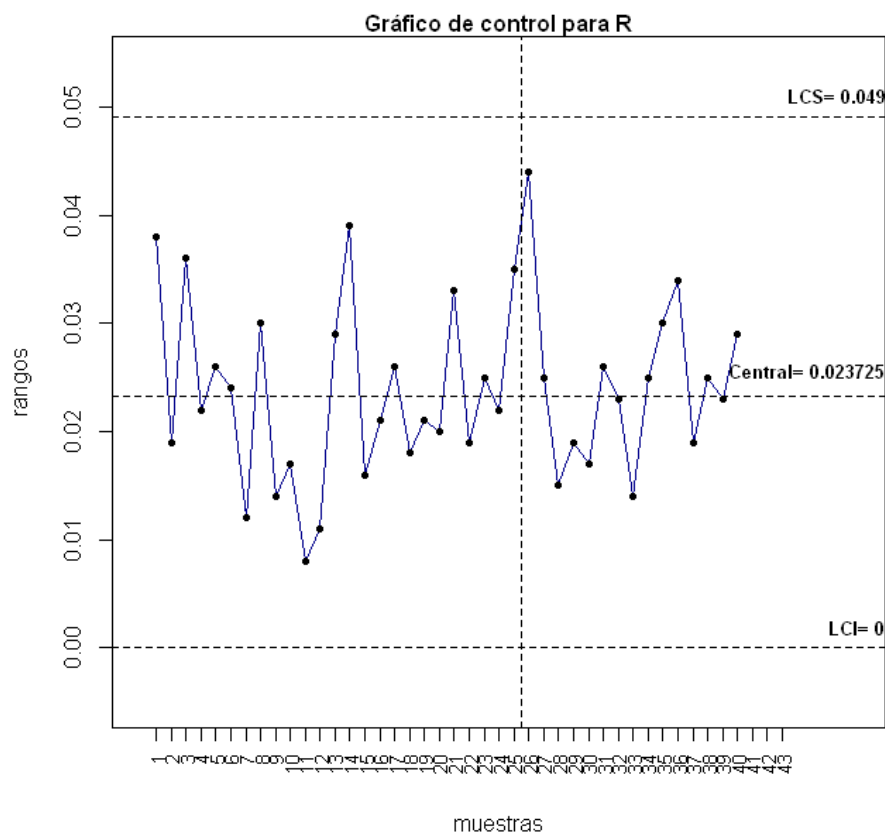
Comando: graf.control.X (x,n=5,alfa=0.0027)

Figura 2: “Gráfica de control para  $\bar{X}$ ”

La gráfica de control para  $\bar{X}$  mostrada en la *Figura 2*, cuando los promedios muestrales preliminares se grafican, no se observa ningún indicio de que exista alguna muestra fuera de control. Por lo tanto se concluye que el proceso está bajo control en los niveles establecidos y se adoptan los límites de control para usarlos en el proceso estadístico del proceso en línea.

## Fase II

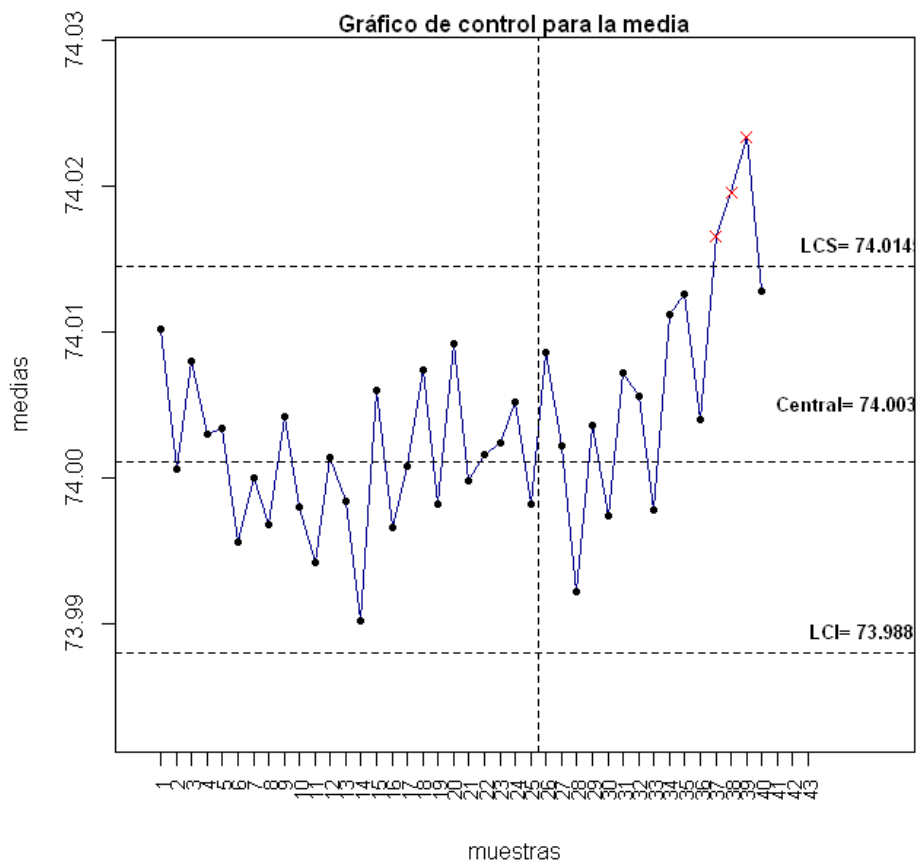
Una vez que se establece un conjunto de límites de control confiables, la gráfica de control se usa para monitorear la producción futura. Para esta fase se analizan 15 muestras adicionales del proceso de manufactura de anillos para pistones.



*Comando:* graf.control.R2 (x,n=5,LCS=0.049,central=0.024,LCI=0)

*Figura 3: “Gráfico de control R. Fase II”*

El gráfico para la media (*Figura 4*) indica a aproximadamente que el proceso está bajo control hasta la muestra 35 y adelante podemos observar que las medias muestrales se encuentran por encima del límite de control superior por lo que es de pensarse que se ha producido una causa asignable. Se puede observar además que a partir de la muestra 34 se produce un cambio en la media del proceso. A partir de observar los resultados se procede a retirar las muestras que están fuera de los límites de control y a realizar un plan de acción para proceder a la búsqueda de que variables o causas han podido influir en el proceso.



*Comando:* graf.control.X2 (x,n=5,LCS=74.014,central=74.003,LCI=73.988)

*Figura 4:* “Gráfico de control para la media. Fase II”

### 3.3. Gráfico de control para observaciones individuales

El gráfico de control para mediciones individuales es un gráfico usado para representar una característica de calidad  $X$  cuantitativa, la cual sigue una distribución normal.

Este tipo de gráfico es útil por ejemplo cuando la velocidad de producción es muy lenta y no es conveniente dejar que se acumulen tamaños de las muestras  $n > 1$ , cuando se realizan mediciones múltiples en la misma unidad de producto, o cuando las mediciones repetidas del proceso difieren únicamente por el error de laboratorio por ejemplo.

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son las medidas individuales, con  $\mu$  y  $\sigma$  conocidas, entonces cada medida individual sigue una distribución normal:

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Los límites de control para este tipo de gráficos es:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \mu + 3\sigma \\ \text{Línea central} &= \mu \\ \text{LCI} &= \mu - 3\sigma \end{aligned}$ |
|---|

Donde el valor de  $z_{\alpha/2}$  para un nivel de significación  $\alpha=0.0027$  es 3.

En el caso en el que  $\mu$  y  $\sigma$  sean desconocidas podemos estimarlas. Para ello se acostumbra usar el rango móvil, que viene definido como:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|$$

Los parámetros para el gráfico de control de las mediciones individuales con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidas son:

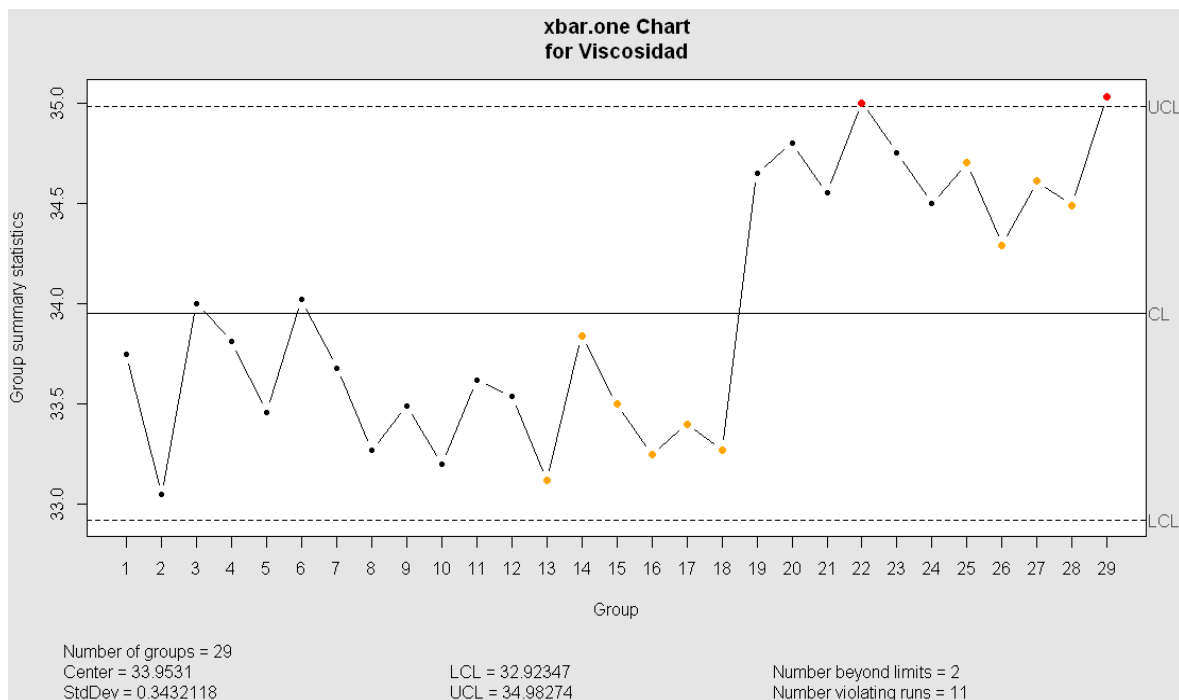
|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{x} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \\ \text{Línea central} &= \bar{x} \\ \text{LCI} &= \bar{x} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \end{aligned}$ |
|---|

El valor de la constante de control  $d_2$  viene tabulada en la tabla I del Anexo I

Este gráfico de control se puede interpretar de forma similar a un gráfico de control  $\bar{x}$  ordinario. Un corrimiento en el promedio del proceso resultará en un punto (o puntos) fuera de los límites de control o bien en un patrón.

El gráfico de control también se puede realizar para rangos (ver próxima sección)

*Ejemplo.- Para realizar el ejemplo se utilizan los datos de la página 250 [2]*



*Comando:* `qcc(x,type="xbar.one")`

*Figura 5: “Gráfica de control para mediciones individuales”*

Podemos observar que dos puntos exceden el límite de control superior (observación número 22 y 29) y que además se produce un cambio brusco en la media de las observaciones a partir del dato número 18. Concluimos que el proceso se encuentra fuera de control y que por lo tanto se deberá a proceder en la búsqueda de las causas no asignables que se han producido para poder mantener el proceso bajo control estadístico.

### 3.4. Gráfico de control para $\bar{x}$ y S

En contadas ocasiones es mejor estimar la desviación estándar del proceso directamente en vez de indirectamente mediante R. Los gráficos de control para la media y S son utilizados generalmente cuando el tamaño de la muestra  $n$  es moderadamente grande ( $n > 10$ ) o éste es variable

Los parámetros para el gráfico de control S se pueden escribir como:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= B_4 \bar{S} \\ \text{Línea central} &= \bar{S} \\ \text{LCI} &= B_3 \bar{S} \end{aligned}$ |
|---|

Los parámetros para el gráfico de control para la media son:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{LCS} &= \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{S} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCI} &= \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{S} \end{aligned}$ |
|---|

Los valores de  $A_3$ ,  $B_3$  y  $B_4$  vienen recogidos en la tabla 1 del anexo 1. Como ejemplo he vuelto a utilizar el ejemplo para los gráficos de control para la media y R.

*Ejemplo.- Para realizar el ejemplo se utilizan para la Fase I: página 213[2]. Y para la Fase II: página 219[2]*

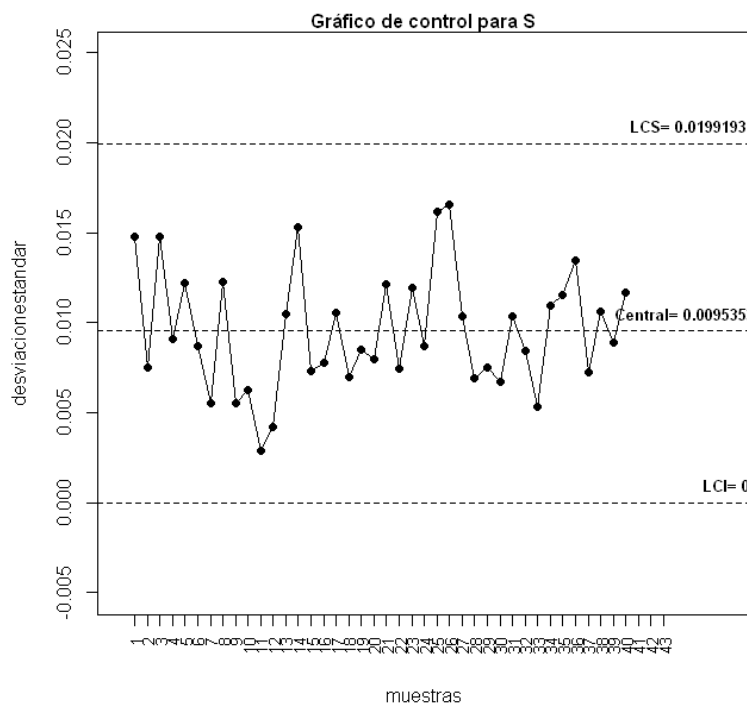
Comenzamos calculando el valor del promedio de las medias de las muestras y la desviación estándar promedio

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} \bar{x}_i = 74.003 \quad \text{y} \quad \bar{S} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} S_i = 0.009535$$

Con estos dos valores podemos hallar el valor de los límites de control ( *Figura 6*)

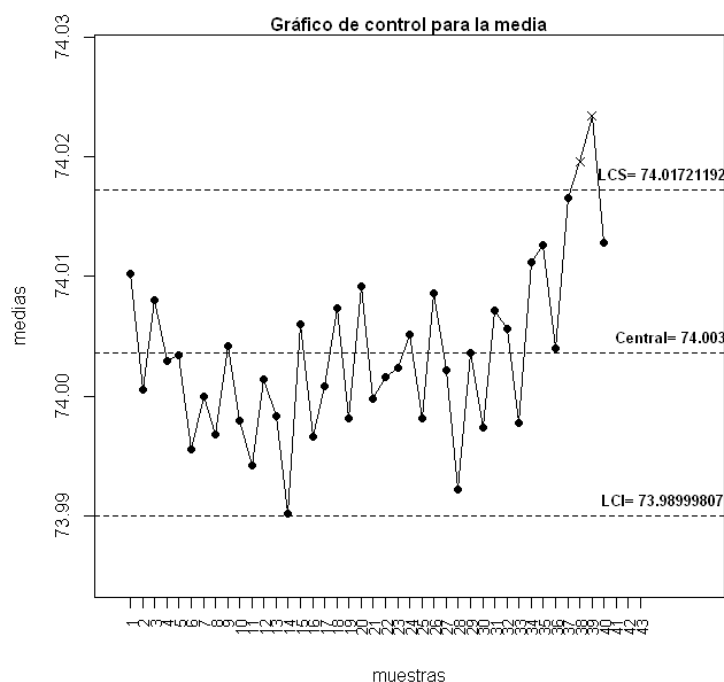


Podemos observar que los límites de control en este ejemplo y en el de los gráficos de control para la media y R son los mismos, aunque generalmente esto no se da ya que los valores difieren ligeramente.



Comando: graf.control.S (x,n=5,alfa=0.0027)

Figura 6: “Gráfica de control para S”



Comando: graf.control.X (x,n=5,alfa=0.0027)

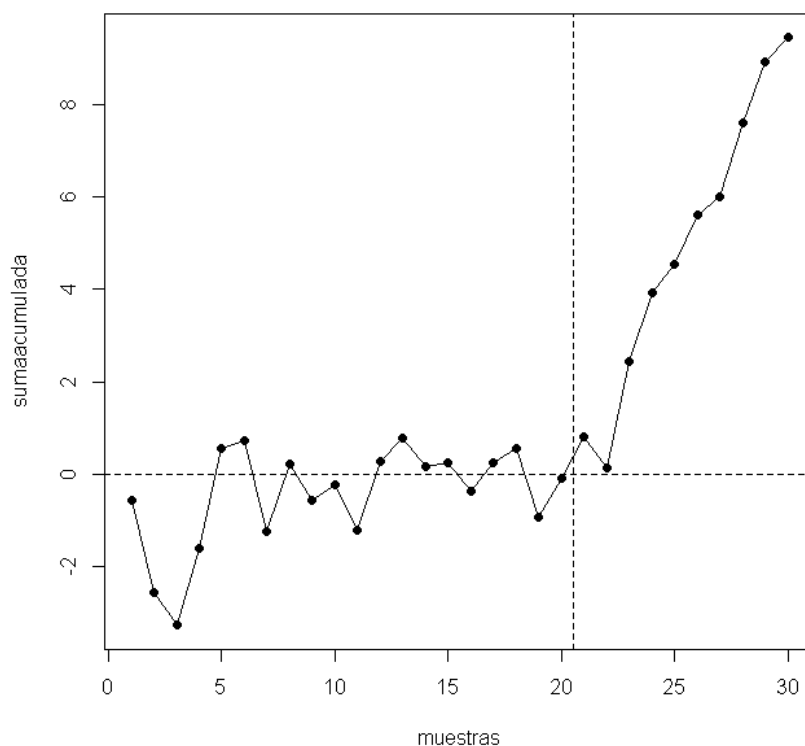
Figura 7: “Gráfica de control para  $\bar{X}$ ”

### 3.5. Gráfico de control de suma acumulada: CUSUM

Las anteriores gráficas de control reciben el nombre de gráficas de control de Shewhart o clásicas. Estas gráficas presentan una gran desventaja ya que sólo utilizan la información del proceso contenida en el último punto graficado e ignora cualquier información ofrecida por la secuencia completa de puntos (insensibilidad ante corrimientos pequeños del proceso).

La gráfica de control cusum es una buena alternativa cuando son importantes los corrimientos pequeños. Incorpora directamente toda la información contenida en la secuencia de los valores muestrales graficando las sumas acumuladas de las desviaciones que presentan los valores muestrales respecto del valor objetivo. Gracias a que combina información de varias muestras, las gráficas de suma acumulada son más efectivas que las clásicas.

Ejemplo.- Para realizar el ejemplo se utilizan los datos de la página 407[2]



Comando: `graf.cusum (x)`

Figura 8: “Gráfica de sumas acumuladas”

Si el proceso se mantiene bajo control en el valor objetivo de  $\mu_0$ , la suma acumulada es una fluctuación aleatoria con media cero. Sin embargo en la gráfica observamos una gran diferencia entre las primeras muestras y las últimas 10 ya que hay una desalineación ascendente o positiva en la suma acumulada.

Por lo tanto, si se desarrolla una tendencia en los puntos graficados ésta deberá considerarse como evidencia de que la media del proceso se ha corrido y se ha de realizar la búsqueda de alguna causa asignable.

Debido a que la gráfica representada carece de límites de control ésta no se considera como una carta de control. Para representar la cusum se realiza la *cusum tabular* o la *máscara V*, siendo la primera la preferible.

### 3.5.1. Gráfico CUSUM tabular

El CUSUM tabular funciona conceptualmente acumulando desviaciones respecto a la media  $\mu_0$ , que están por encima mediante el estadístico  $C^+$ , y acumulando desviaciones respecto a la media  $\mu_0$  que están por debajo mediante el estadístico  $C^-$ . Estos valores  $C^+$  y  $C^-$ , se calculan de la siguiente forma:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 + K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

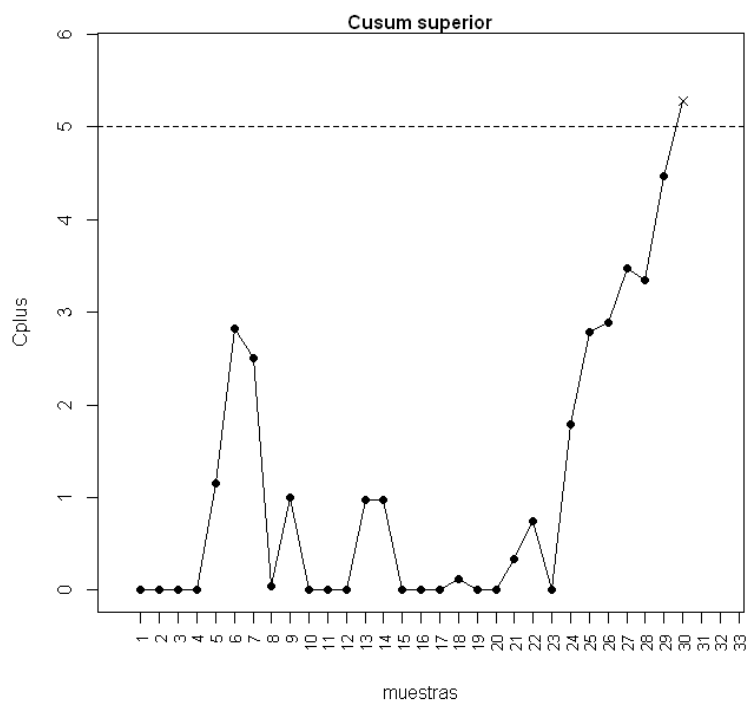
Siendo los valores iniciales  $C_0^+ = C_0^- = 0$

$K$  se denomina “valor de referencia” y se suele tomar como la semidiferencia entre el valor medio entre el valor objetivo  $\mu_0$  y el valor de la media fuera del control  $\mu_1$  que se quiera detectar de forma rápida.

Si  $C^+$  o  $C^-$  superan el *intervalo de decisión*  $H$  se considera que el proceso está fuera de control. Un valor razonable de  $H$  es cinco veces la desviación estándar del proceso  $\sigma$ .

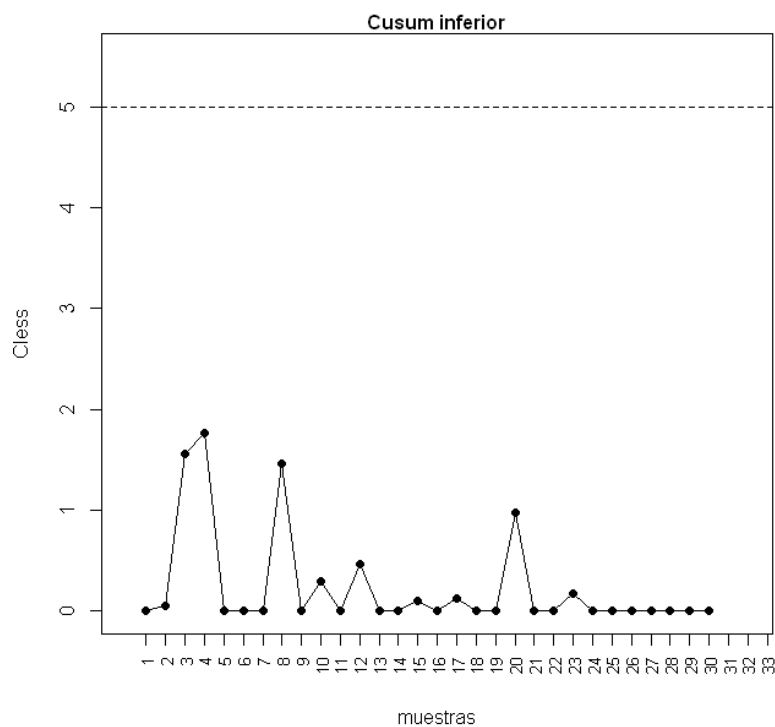
*Ejemplo.- Tomando como datos los del ejemplo anterior se construye la cusum tabular superior e inferior*

Se supone que la magnitud del corrimiento que se quiere detectar es  $1.0 \cdot \sigma = 1$  en este caso ya que la desviación estándar del proceso era 1. El valor fuera de control de la media del proceso es  $\mu_1 = 10 + 1 = 11$ , por lo tanto  $K = 0.5$  y el valor recomendado del intervalo de decisión es  $H = 5 \cdot \sigma = 5$ . Siguiendo el algoritmo de formación de la sucesión  $C^+$  y de la  $C^-$  llegamos a las siguientes gráficas de control:



Comando: `graf.controlcusumpos(x,mu0,sd.proceso)`

Figura 9: “Gráfica de control cusum superior”



Comando: `graf.controlcusumneg(x,mu0,sd.proceso)`

Figura 10: “Gráfica de control cusum inferior”

Tras los cálculos realizados observamos que la cusum del lado superior en el periodo 30 es mayor que H, por lo que se concluye que el proceso está fuera de control en ese punto.

### 3.6. Curvas características de operación de gráficos de control clásicos

Las curvas de características de operación representan la probabilidad de que una observación esté entre los límites de control del proceso. Son útiles para determinar el tamaño que debe tener una muestra para detectar una diferencia especificada con una probabilidad dada. Conforme el tamaño de la muestra  $n$  se incrementa, la probabilidad del error tipo II se hace más pequeña para un valor de  $\alpha$  determinado. Es decir, para detectar una diferencia especificada, la potencia de la prueba puede aumentarse incrementando el tamaño de la muestra.

Las curvas características de operación representadas en esta sección se han obtenido a través de su valor exacto para diferentes alteraciones en la media y no por simulaciones.

#### 3.6.1. Curva característica de operación del gráfico de control $\bar{X}$

Para la construcción de la curva de característica de operación del gráfico de control para la media tenemos que tener en cuenta cambios en la media del proceso bajo control  $\mu_0$ , es decir,  $\mu_1 = \mu_0 + \lambda\sigma$ . Se genera la curva calculando  $\beta$  para los diferentes valores de  $\mu$  suponiendo  $\sigma$  conocida:

$$\beta = P \{ LCI \leq \bar{X} \leq LCS \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + \lambda\sigma \}$$

Sabiendo que  $\bar{X}$  sigue una distribución normal y que los límites de control superior e inferior son  $LCS = \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n}$  y  $LCI = \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} \beta &= P \{ LCI \leq \bar{X} \leq LCS \} = P \{ \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} \} = P \{ \mu_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu \leq \bar{X} - \mu \leq \mu_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu \} = P \{ -L\sigma/\sqrt{n} - \lambda\sigma \leq \bar{X} - \mu \leq L\sigma/\sqrt{n} - \lambda\sigma \} = \\ &P \left\{ \frac{-L\sigma/\sqrt{n} - \lambda\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{L\sigma/\sqrt{n} - \lambda\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} \right\} = P \{ -L - \lambda\sqrt{n} \leq Z \leq L - \lambda\sqrt{n} \} \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta = P \{ Z \leq L - \lambda\sqrt{n} \} - P \{ Z \leq -L - \lambda\sqrt{n} \}}$$

Para ilustrar la aplicación de la ecuación anterior vamos a considerar  $L=3$  (límites  $3\sigma$  usuales) y trazar una curva característica de operación para determinar la probabilidad de detectar un cambio en la  $\mu$  del proceso, es decir, se grafica el riesgo  $\beta$  contra la magnitud del corrimiento que quiere detectarse expresado en unidades de desviación estándar para varios tamaños de la muestra.

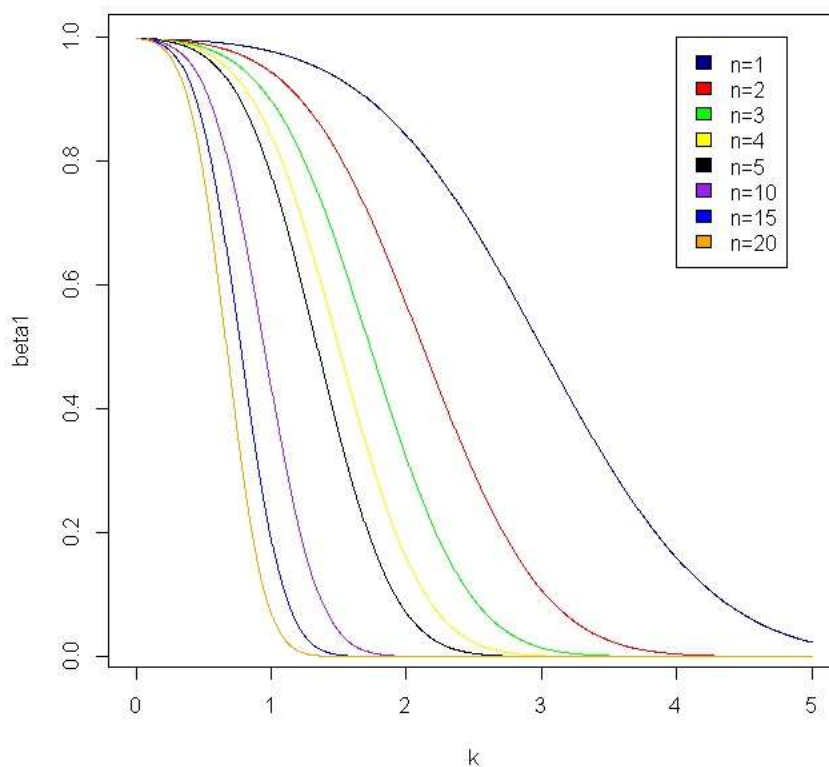


Figura 11: “Curva OC para la media”

La Figura 11 indica que para tamaños de la muestra típicos de cuatro, cinco y seis, la gráfica de control para la media no es particularmente efectiva para detectar un corrimiento pequeño. Aun cuando los tamaños muestrales pequeños conducen a un riesgo  $\beta$  relativamente grande, porque se seleccionan y aprueban las muestras en forma periódica, existe una posibilidad muy buena de detectar el cambio de modo razonablemente rápido aunque tal vez no en la primera muestra después del cambio.

### 3.6.2. Curva característica de operación para gráficos de control $R$

Para construir la curva característica de operación de la gráfica de control  $R$  se emplea la distribución del rango relativo  $W=R/\sigma$ .

Si se supone que el valor bajo control de la desviación estándar es  $\sigma_0$ , entonces en la curva OC se grafica la probabilidad de no detectar un corrimiento a un nuevo valor de  $\sigma$  frente a  $\lambda = \sigma_1 / \sigma_0$ .

$$\beta = P \{ LCI \leq \bar{R} \leq LCS \mid \sigma_1 = \lambda \sigma_0 \}$$

Sabiendo que  $\bar{R}$  sigue una distribución normal y que los límites de control superior e inferior son  $LCS = D_4 \cdot \bar{R} = (1+3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \bar{R}$ ,  $LCI = D_3 \cdot \bar{R} = (1-3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \bar{R}$ .  $D_1 = d_2 - 3d_3$  y  $D_2 = d_2 + 3d_3$ . Además teniendo en cuenta que  $\frac{R_i - d_2 \cdot \sigma}{d_3 \cdot \sigma} \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} \beta &= P \{ LCI \leq \bar{R} \leq LCS \} = P \{ (1-3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 \leq \bar{R} \leq (1+3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 \} = \\ &= P \{ (1-3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0 \leq \bar{R} - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0 \leq (1+3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0 \} = \\ &= P \{ \frac{(1-3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0}{d_3 \cdot \lambda \cdot \sigma_0} \leq \frac{\bar{R} - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0}{d_3 \cdot \lambda \cdot \sigma_0} \leq \frac{(1+3 \frac{d_3}{d_2}) \cdot \sigma_0 - d_2 \cdot \lambda \cdot \sigma_0}{d_3 \cdot \lambda \cdot \sigma_0} \} = \\ &= P \{ (\frac{D_1}{\lambda} - d_2) / d_3 \leq Z \leq (\frac{D_2}{\lambda} - d_2) / d_3 \} = \\ &= P \{ Z \leq (\frac{D_2}{\lambda} - d_2) / d_3 \} - P \{ Z \leq (\frac{D_1}{\lambda} - d_2) / d_3 \} \end{aligned}$$

Donde las constantes  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $d_2$  y  $d_3$  vienen tabuladas en la tabla I del Anexo I para diferentes tamaños muestrales.

La *Figura 12* muestra la representación gráfica de una curva OC para un tamaño muestral 5 y un tamaño 10.

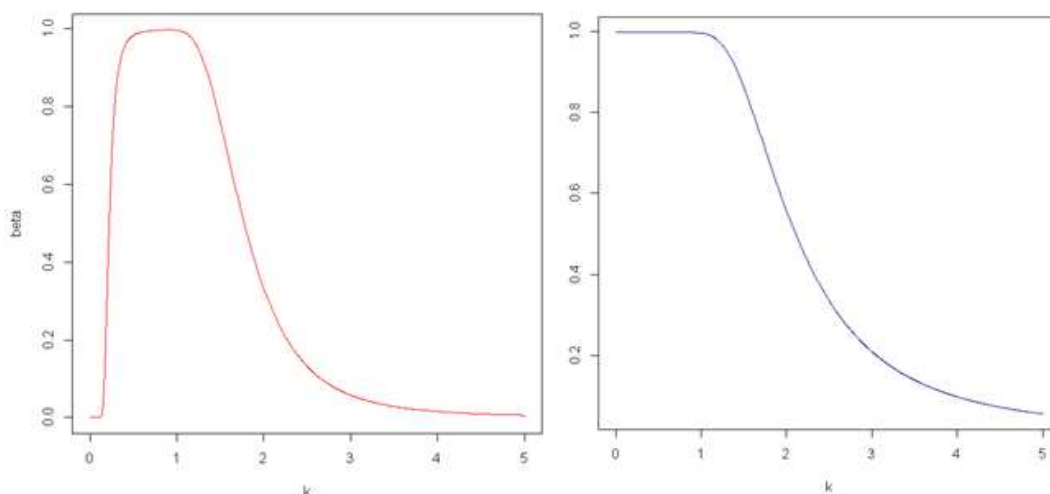


Figura 12: “Curva OC para tamaños muestrales 10 y 5”

A partir de la construcción de las curvas de características de operación para diferentes valores de tamaño muestral, se observa que la gráfica de R no es muy eficaz para descubrir cambios en el proceso con tamaños muestrales pequeños.

En el Anexo IV se recoge la curva característica de operación para  $S$ , ya que ésta aporta prácticamente la misma información que las curvas OC descritas en este apartado.

# Capítulo 4

## Gráficos de control basados en rangos

Gráficos de control basados en rangos es el capítulo principal de este documento. En él se define el concepto de rango como una medida de centralidad, se explican los principales gráficos de control desarrollados por Regina Liu ( $r$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$ ) y se implementan mediante el uso del programa estadístico R. Además se realiza una breve comparativa entre la eficiencia y eficacia de los gráficos de control  $Q$  y  $r$ .



#### 4.1. Gráficos de control basados en rangos

Cuando medimos un factor  $X$  característico de un producto para poder comprobar el rango de calidad de éste normalmente usamos los gráficos de control para la media  $\bar{X}$  y el gráfico CUSUM. Sin embargo, el uso de dichos instrumentos es limitado debido a que son válidos solo bajo los supuestos de que  $X$  es univariante y además asumimos que se distribuye bajo una distribución normal, lo cual no siempre sucede.

Aunque existen métodos para construir gráficos control clásicos, su uso está restringido al caso de que las observaciones estudiadas sigan una distribución normal. Si representamos la característica del proceso midiendo su correspondiente rango podemos desarrollar gráficos de control basados en dichos rangos siguiendo los principios de los gráficos univariantes  $X$ ,  $\bar{X}$  y CUSUM.

Para realizar esto, Regina Y. Liu propone el uso de tres tipos de gráficos de control:  $r$ ,  $Q$  y  $S$ .

Estos gráficos de control no paramétricos están basados en el estadístico  $r_n(\cdot)$ , el cual viene definido como:

$$r_n(x) = \frac{2}{k} \min (\#(x_i > x), \#(x_i < x)) + \frac{\#(x_i = x)}{k}$$

Donde  $\#$  representa el número de observaciones.

Este estadístico describe directamente el rango como una medida de centralidad o representatividad de una observación dentro de un conjunto de observaciones, de tal modo que la mediana, como observación más central es la más representativa.

En las siguientes secciones se utilizará un valor de  $\alpha$  de 0.01 con la finalidad de poder realizar más fácilmente la discusión de los gráficos de control.

#### 4.2. Gráfica de control $r$

El gráfico de control  $r$  es similar al gráfico  $X$  para mediciones individuales.

Para proceder a realizar el gráfico de control  $r$  debemos calcular cada  $r_i$ , y posteriormente, definimos sus parámetros de control como:

Línea Central = 0.5  
 $LC = \alpha$

El proceso es declarado fuera de control si algún  $r_n(x)$  está por debajo del valor del LC. Hay que denotar que  $\alpha$  es la llamada proporción de alarma y que en este tipo de gráfico no existe un LCS.

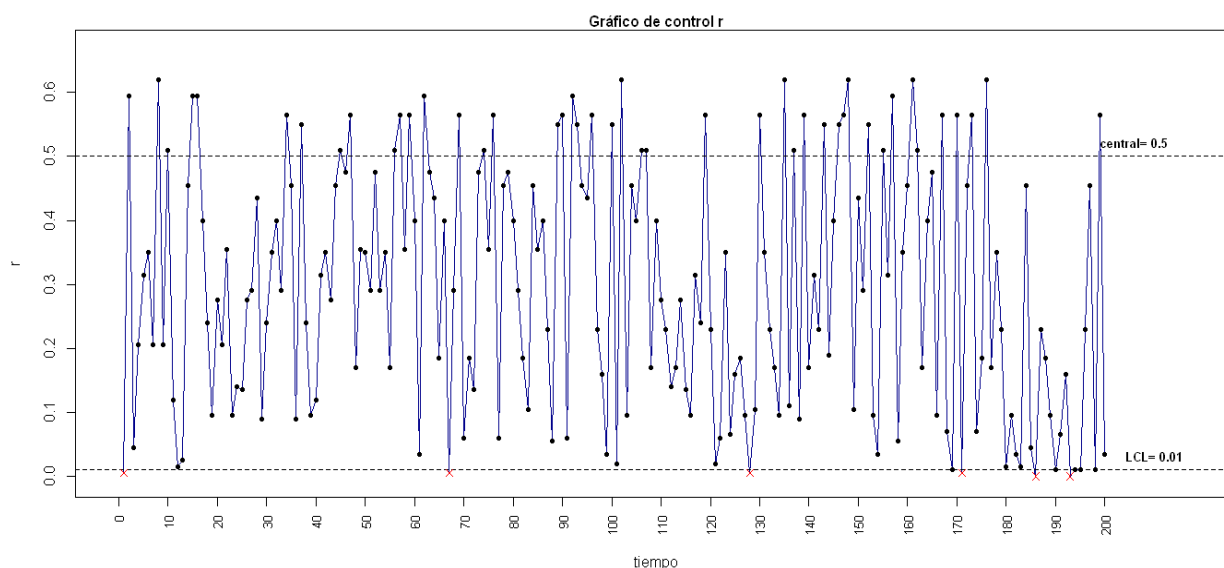
La expresión para el cálculo de  $r_n(x)$  indica el rango respecto a una probabilidad (la cantidad de datos que están menos centrales que  $x$ ).

La gráfica de control por rangos, llamada también gráfica  $r$ , contrasta sucesivamente las hipótesis:

- $H_0$ : La nueva observación tiene la misma distribución que la distribución de referencia
- $H_1$ : Existe un cambio en la ubicación o dispersión de la distribución de la nueva observación respecto a la distribución de referencia.

En los rangos se detectarán cambios de localización y escala. Si la dispersión de las nuevas observaciones es menor, pero no se altera la localización, los rangos serán mayores y no se detectarán anomalías en el gráfico  $r$ .

*Ejemplo.- Haciendo uso de los datos recogidos en la página 213 [2] y la página 219[2]*



Comandos: rangoprof(x,x1)  
graf.control.rQ2(r,n,alfa=0.01,LCL=0.01)

Figura 13: “Gráfica de control  $r$ ”

Para la realización de este gráfico se han tomado 200 mediciones. Al observar la representación gráfica vemos que algunas de las mediciones tomadas se encuentran por debajo de la línea de control inferior y por lo tanto el proceso no está bajo control.

#### 4.3. Gráfico de control Q

El gráfico de control Q es similar al gráfico  $\bar{X}$ . Cuando  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son muestras univariantes y siguen una distribución normal, la gráfica representa las medias de las muestras. El gráfico de control  $\bar{X}$  puede prevenir una falsa alarma cuando el proceso está bajo control, pero cuando alguna muestra individual cae fuera del límite de control simplemente es debido a fluctuaciones aleatorias. Esta es una ventaja sobre el gráfico tipo X.

Para la construcción del gráfico Q procedemos a obtener el estadístico  $r_n(x)$  a partir de los valores de las medias muestrales y posteriormente los valores de sus parámetros:

Si el tamaño de cada muestra  $n$  es mayor o igual a 5 y los parámetros de la distribución son conocidos:

$$\begin{aligned} \text{Línea central} &= 0.5 \\ LC &= 0.5 - z_{\alpha}(12n)^{-1/2} \end{aligned}$$

Si el tamaño de cada muestra  $n$  es mayor o igual a 5 y los parámetros de la distribución son desconocidos:

$$\begin{aligned} \text{Línea central} &= 0.5 \\ LC &= 0.5 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}{2}} \end{aligned}$$

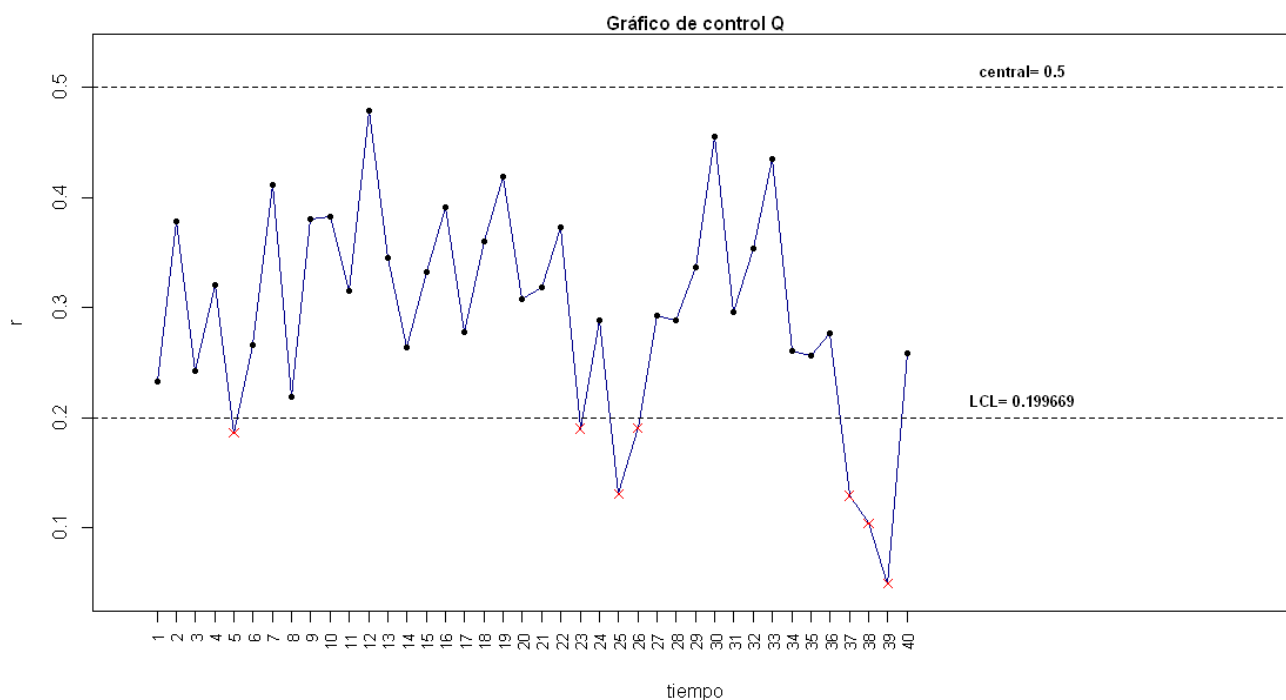
Si el valor de  $n$  es menor que 5 y el valor de  $\alpha$  es pequeño:

$$\begin{aligned} \text{Línea central} &= 0.5 \\ LC &= (n!\alpha)^{1/n}/n \end{aligned}$$

El proceso es declarado fuera de control si algún  $r_n(x)$  está por debajo del valor del LC.

*Ejemplo.- Haciendo uso de los datos recogidos en la página 213 [2] y la página 219[2]*

Como el tamaño muestral es 5, el valor del límite de control para la construcción del gráfico de control Q es:



Comandos: rangoprof(x,x1)  
graf.control.rQ2(r,n,alfa=0.01,LCL=0.1997)

Figura 14: “Gráfica de control Q”

Se observa que algunas muestras se encuentran por debajo del LC con lo que concluimos que el proceso no está bajo control, por lo que podemos deducir que se ha producido una causa asignable. A partir de observar los resultados se procede a retirar las muestras que están fuera de los límites de control y a realizar un plan de acción para proceder a la búsqueda de que variables o causas han podido influir en el proceso.

#### 4.4. Gráfico de control S y S\*

Este tipo de gráfico está basado en el gráfico de control *CUSUM* (sumas acumuladas). El gráfico de sumas acumuladas nos ayuda a predecir desviaciones sobre los valores esperados. Éste es más efectivo que los gráficos de control  $X$  o  $\bar{X}$  en detectar pequeños cambios y quizás sea el gráfico más utilizado.

Para construir el gráfico de control S debemos hallar el estadístico  $r_n(x)$  para todas las mediciones y calculamos  $S_n$ :

$$S_n = \sum_{i=1}^n [r(X_i) - \frac{1}{2}]$$

A continuación definimos los parámetros de control como:

|   |
|---|
| Línea Central = 0<br>LC = $-(z_\alpha(n/12)^{1/2})$ |
|---|

En ocasiones podemos encontrarnos con casos en los que el tamaño de la muestra  $n$  es grande por lo que es mejor construir el gráfico de control S\*. Para construir este gráfico de control tenemos que hallar primero  $S_n^*(G)$

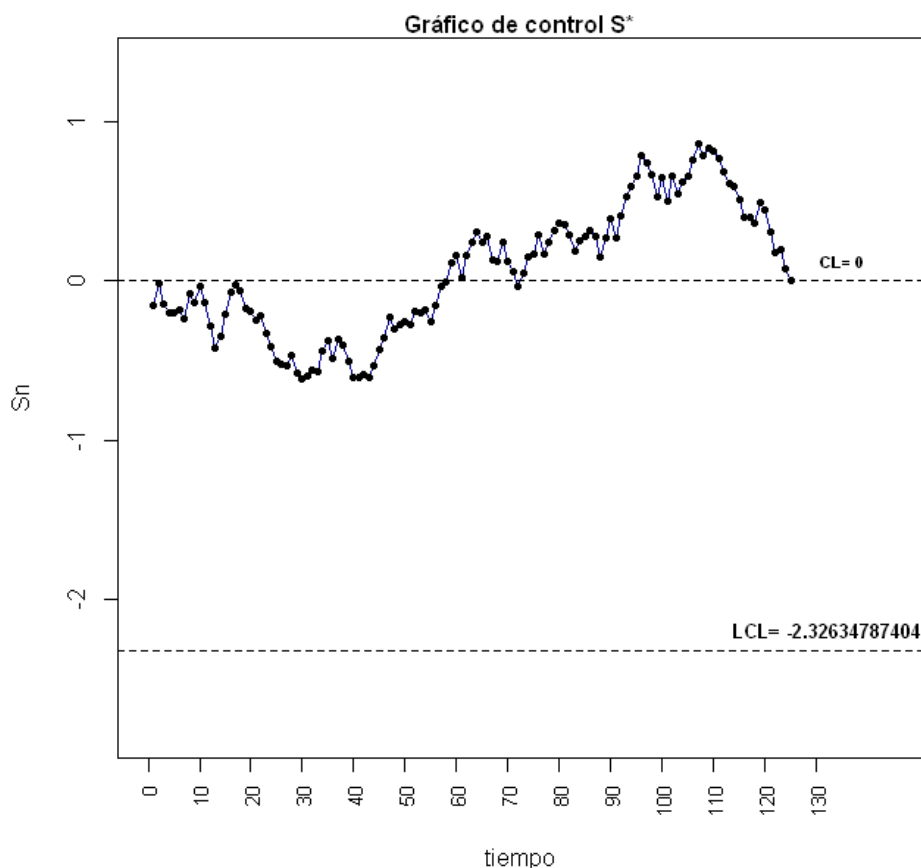
$$S_n^* = S_n / \sqrt{n/12}$$

Cuyos parámetros de control son:

|                                       |
|---------------------------------------|
| Línea central = 0<br>LC = $-z_\alpha$ |
|---------------------------------------|

Cuando alguno de los puntos se encuentre por debajo del LC se dice que el proceso está fuera de control estadístico y hay que proceder a corregir y eliminar las causas que hayan podido provocarlo.

*Ejemplo.- Haciendo uso de los datos recogidos en la página 213 [2] y la página 219[2]*



*Comandos:* rangoprof(n)  
grafcontrolS(r,alfa=0.01)

*Figura 15: “Gráfica de control S\*”*

En la *Figura 15* podemos observar no hay ninguna observacion que se encuentre por debajo del límite de control inferior y por lo tanto el proceso se encuentra bajo control estadístico. En este caso los valores de los parámetros de control son  $CL= 0$  y  $LCI = -1.96$ .

#### 4.5. Comparativa entre el gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart y el gráfico de control $Q$ de Liu

Para realizar la comparación entre el gráfico de control para la media de Shewhart y el gráfico  $Q$  de Liu se procede a la construcción de las curvas características de operación asociadas a cada uno, suponiendo que las observaciones siguen una distribución normal en un primer caso y exponencial en el segundo.

Para el caso en el que las observaciones siguen una distribución normal, se considera un nivel de significación  $\alpha=0.05$  y muestras de  $n=5$  observaciones, y en el segundo caso en el que siguen una distribución exponencial, con  $\lambda=1$  y también se toman muestras de  $n=5$  observaciones.

En el primer caso, el valor del eje  $X$  (denotado por  $x$ ) refleja cambios en la media de las observaciones a medida que este valor aumenta  $x\sigma$  unidades, es decir, el punto  $(x,y)$  indica que si la calidad sigue una distribución  $N(\mu+x\sigma, \sigma)$  en lugar de una distribución  $N(\mu, \sigma)$ , la probabilidad de estar dentro de los límites de control es  $y$ . La curva característica de operación para el gráfico de control para la media se ha obtenido según su valor exacto mientras que la del gráfico de control  $Q$  es simulada por lo que salvo el pequeño error que se comete al no ser exacto, ambas curvas parten del punto  $(0,0.95)$ .

En el segundo caso se consideran distribuciones exponenciales de media 1, donde la característica aumenta  $x$  unidades, de modo que es una variable  $\text{Exp}(1)+x$ . En este caso las curvas características de observación también son simuladas.

Para la realización de las simulaciones se toma un nivel de significación  $\alpha=0.05$  y un tamaño muestral  $n=5$  y a continuación se generan 10000 observaciones iniciales, ver código en el Anexo II.

En la *Figura 16* podemos observar las curvas características de operación cuando las observaciones siguen una distribución normal, y aunque no hayan grandes diferencias entre el gráfico de control  $Q$  y el gráfico para la media, el segundo es más efectivo ya que detecta variaciones más pequeñas en la media de las observaciones de una forma más rápida.

En la *Figura 17* se han representado las curvas características de operación cuando las observaciones siguen una distribución exponencial. Se puede observar claramente que la curva para el gráfico de control de Shewhart no responde bien ante una distribución que no sea normal mientras que la curva para el gráfico  $Q$  de Liu funciona mejor que la anterior ante la distribución exponencial, salvo la pequeña anomalía que presenta ya que el valor de la probabilidad es mayor cuando  $x=0.2$  que cuando  $x$  vale 0, que viene motivado porque la cola a la derecha de la exponencial es más larga que la cola de la izquierda.

Con esto queda demostrado que el gráfico de control para la media de Shewhart solo es apto para observaciones que sigan una distribución normal mientras que el gráfico de control Q de Liu no supone la normalidad en las observaciones de los procesos.

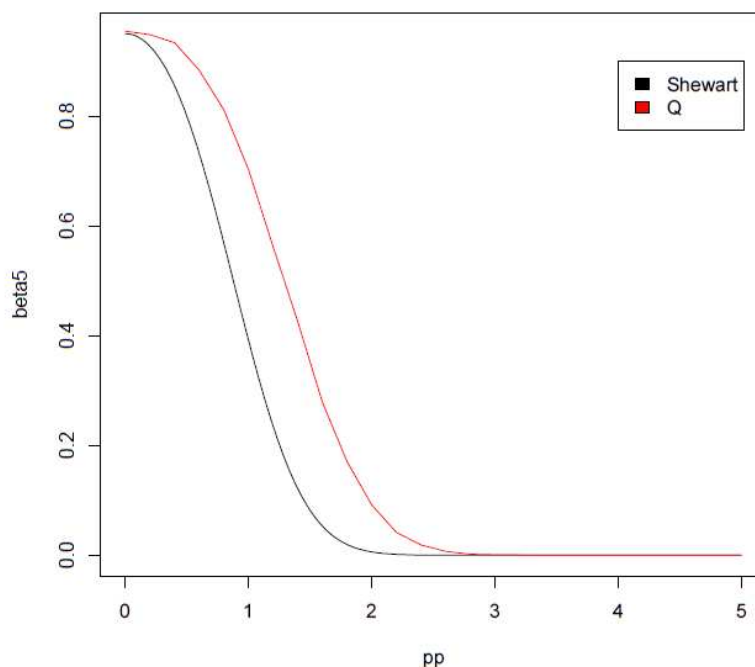


Figura 16: “Comparativa entre el gráfico de control para la media y el gráfico Q.  
Distribución normal”

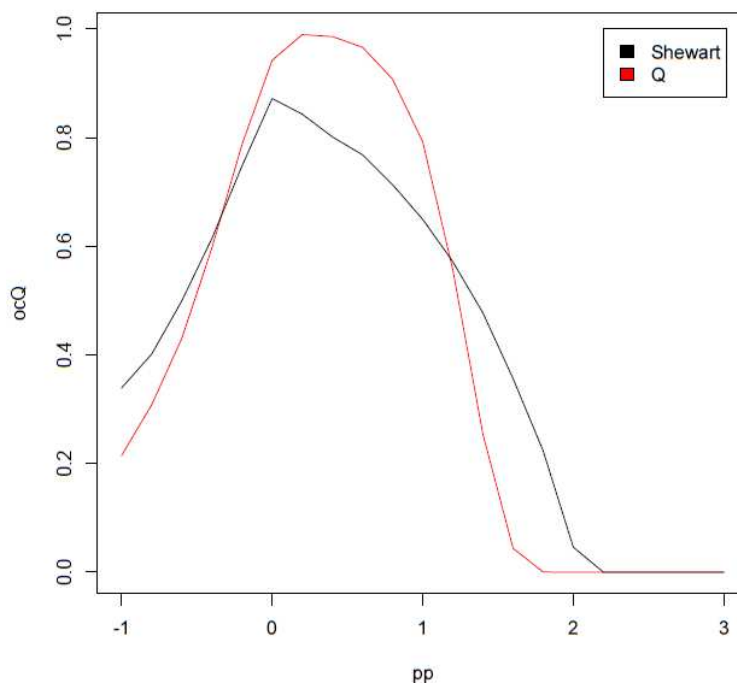


Figura 17: “Comparativa entre el gráfico de control para la media y el gráfico Q.  
Distribución exponencial”



#### 4.6. Comparativa entre el gráfico de control $\bar{X}$ de Shewhart y el gráfico de control $r$ de Liu

Al igual que en la comparación anterior, para realizar la comparación entre el gráfico de control  $\bar{X}$  de Shewhart y el gráfico  $r$  de Liu se procede a la construcción de las curvas características de operación asociadas a cada uno, suponiendo que las observaciones siguen una distribución normal en un primer caso y exponencial en el segundo.

Para el caso en el que las observaciones siguen una distribución normal, se considera un nivel de significación  $\alpha=0.05$  y en el segundo caso en el que siguen una distribución exponencial con  $\lambda=1$ .

En el primer caso, el valor del eje  $X$  (denotado por  $x$ ) refleja cambios en la media de las observaciones a medida que este valor aumenta  $x\sigma$  unidades, es decir, el punto  $(x,y)$  indica que si la calidad sigue una distribución  $N(\mu+x\sigma, \sigma)$  en lugar de una distribución  $N(\mu, \sigma)$ , la probabilidad de estar dentro de los límites de control es  $y$ . La curva característica de operación para el gráfico de control  $\bar{X}$  se ha obtenido según su valor exacto mientras que la del gráfico de control  $r$  es simulada por lo que salvo el pequeño error que se comete al no ser exacto, ambas curvas parten del punto  $(0,0.95)$ .

En el segundo caso se consideran distribuciones exponenciales de media 1, donde la característica aumenta  $x$  unidades, de modo que es una variable  $Exp(1)+x$ . En este caso las curvas características de observación también son simuladas.

Para la realización de las simulaciones se toma un nivel de significación  $\alpha=0.05$  y un tamaño muestral  $n=1$  y a continuación se generan 10000 observaciones iniciales, ver código en el Anexo II.

En la *Figura 18* se observa que el comportamiento de ambos gráficos control, cuando las observaciones estudiadas siguen una distribución normal, es prácticamente idéntico. Aún así, el gráfico  $r$  es más eficiente ya que permite observar cambios en las medias de las observaciones mientras que el gráfico  $\bar{X}$  de Shewhart no.

En la *Figura 19* se han representado las curvas características de operación cuando las observaciones siguen una distribución exponencial. Se puede observar claramente que la curva para el gráfico de control  $\bar{X}$  no responde bien ante una distribución que no sea normal mientras que la curva para el gráfico  $r$  de Liu funciona mejor que la anterior ante la distribución exponencial, salvo la pequeña anomalía que presenta ya que el valor de la probabilidad es mayor cuando  $x=0.2$  que cuando  $x$  vale 0, que viene motivado porque la cola a la derecha de la exponencial es más larga que la cola de la izquierda.

Al observar ambas curvas características de operación concluimos que el gráfico de control  $X$  de Shewhart no es apto cuando las observaciones siguen una distribución que no sea normal mientras que el gráfico de control  $r$  de Liu funciona independientemente de la distribución. Además cabe destacar que ambas gráficas de control funcionan de forma similar ante observaciones que sigan una distribución normal.

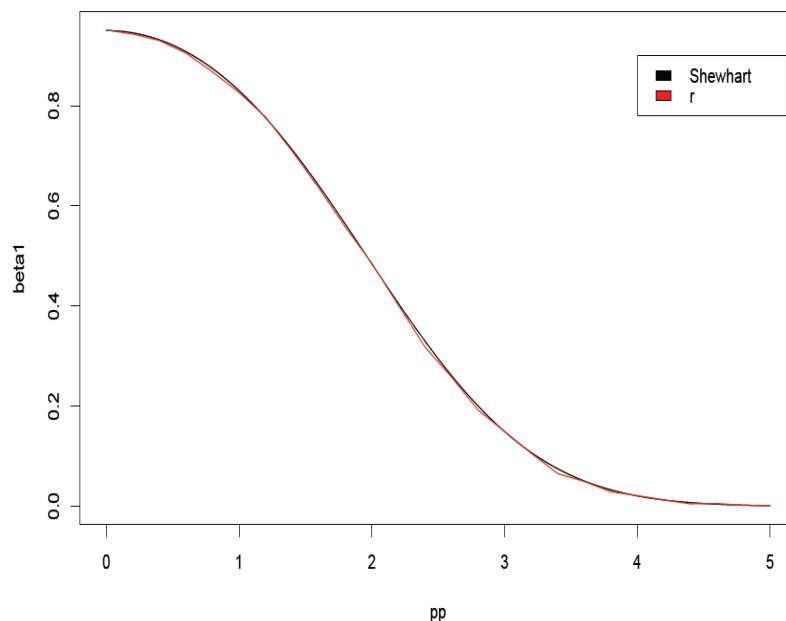


Figura 18: “Comparativa entre el gráfico  $X$  y el gráfico  $r$ . Distribución normal”

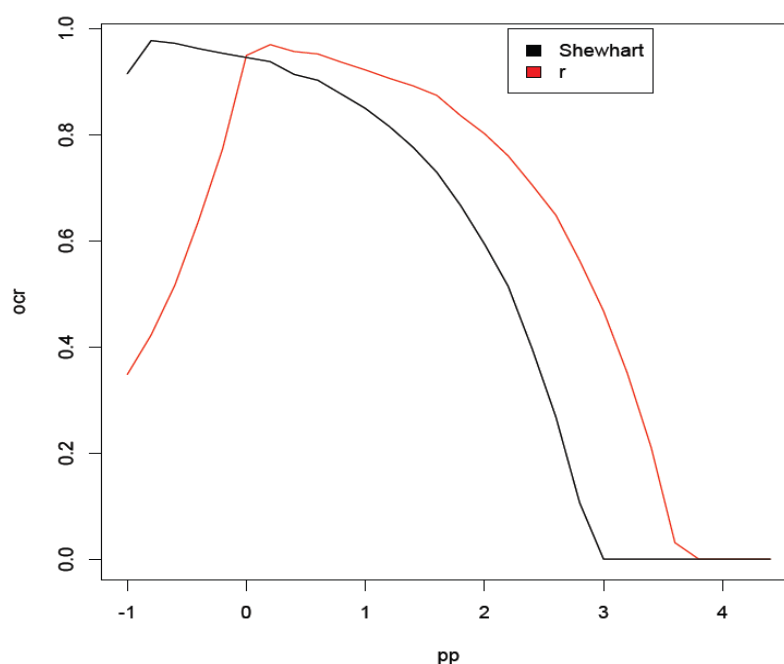


Figura 19: “Comparativa entre el gráfico  $X$  y el gráfico  $r$ . Distribución exponencial”

## Capítulo 5

# Gráficos de control multivariantes

En esta sección se procede a la implementación de los gráficos de control  $\bar{r}$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$  pero aplicados al caso multivariante. Además se desarrolla el concepto de profundidad de datos y el de clasificación por rangos usado para determinar si una observación es diferente de aquellas que conforman el conjunto original y en el cual se basa la construcción de los gráficos de control propuestos por Regina Liu en el caso multivariante. Además se hace una comparativa entre el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling (ver [2] y [10]) y los gráficos de control basados en rangos. Para finalizar se realiza una comparativa en el uso de las diferentes definiciones de profundidad aportadas por Liu, Tukey y Mahalanobis (ver [5],[9], [15] y [16]).

### 5.1. Profundidad de datos.

Las gráficas propuestas por Liu [3] se basan en el concepto de profundidad de datos cuyo único requerimiento es contar con una distribución de referencia, que describe una distribución  $k$  ( $k \geq 1$ ) dimensional. En la práctica esta suposición se traduce en contar con una muestra  $Y_1, \dots, Y_m$  llamada muestra de referencia de vectores  $k$  dimensionales.

Para entender cuál es su significado empezaremos por definir función de profundidad. Fijada una distribución de probabilidad en  $k$ -dimensión, una *función de profundidad* es asigna a cada punto de  $\mathbb{R}^k$  su grado de centralidad respecto de la distribución de referencia.

La noción de profundidad de datos se basa en el hecho de que cualquier densidad de probabilidades distingue entre puntos “centrales” y “periféricos”. Una función de profundidad asigna a cada  $y$  en  $\mathbb{R}^k$  un valor no negativo, el cual puede interpretarse como su localización en la nube de datos. Las profundidades más grandes corresponden al centro de la distribución, mientras que las más pequeñas corresponden a regiones externas. Este sistema de clasificación por rangos es usado para determinar si una observación es diferente de aquellas que conforman el conjunto original. Las funciones de profundidad deben satisfacer un número de propiedades: invariante afín, monotonidad, maximalidad al centro, desvanecimiento al infinito.

La profundidad y las regiones centrales pueden utilizarse para describir un conjunto de datos multivariante. Así, a partir de una noción de profundidad obtenemos un punto más profundo, que es una medida de tendencia central multivariante.

Existen funciones que cumplen con estas propiedades, entre otras, la profundidad de Mahalanobis [14], la profundidad simplicial (Liu [5]) y la profundidad de Tukey ([15],[16])

En este caso Liu se basa en la profundidad de Mahalanobis debido a su facilidad de cómputo e interpretación. Se denota por MD se define como:

$$MD = \frac{1}{[1 + (y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu)]}$$

Donde,  $\mu$  es el vector de medias y  $\Sigma^{-1}$  es la inversa de la matriz de varianzas-covarianzas de la distribución de referencia. La profundidad de Mahalanobis es una transformación de la distancia de Mahalanobis.

Si los parámetros de la distribución de referencia no son conocidos, la versión muestral de la profundidad de Mahalanobis viene dada por:

$$MD = \frac{1}{[1 + (y - \bar{Y})'(S^{-1})(y - \bar{Y})]}$$

Donde,  $\bar{Y}$  es el vector de medias muestrales de los datos  $Y_1, \dots, Y_m$  y  $S$  es la matriz de varianzas-covarianzas de la muestra de referencia.

A modo de comparativa usaremos también las definiciones de profundidad aportadas por Liu y Tukey.

Tukey definió la profundidad *semiespacial* de un punto  $x \in \mathbb{R}^k$  respecto de una muestra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  como la menor fracción de puntos de la muestra que hay en un semiespacio cerrado que contenga a  $x$ . A cada punto  $x$  se le asigna como profundidad el mínimo de la probabilidad de los semiespacios que contienen al punto  $x$ . Para una distribución elípticamente simétrica, si se calcula la profundidad del centro de la misma, todos los semiespacios que pasan por él dejan a ambos lados una probabilidad igual a  $1/2$ .

Un caso sencillo para entender la definición de profundidad de Tukey es tomar una muestra perteneciente a  $\mathbb{R}^2$ . Tomamos un punto de ese semiespacio y hacemos pasar por él una recta. A continuación observamos la cantidad de observaciones que se encuentran a un lado y a otro y vemos si el elemento  $x_i$  pertenece o no al lado en el cual se encuentra el menor número de observaciones. La profundidad se define formalmente como la probabilidad de que el punto  $x_i$  pertenezca al lado donde se encuentran el menor número de observaciones de la muestra.

Liu definió la profundidad simplicial como la probabilidad de que un punto esté en simplex cuyos vértices son  $k+1$  observaciones independientes de una distribución  $P$ .

Al fin de dar una definición sencilla de la profundidad simplicial, se toma de nuevo una muestra perteneciente a  $\mathbb{R}^2$ . Tomamos un punto del semiplano y construimos triángulos cuyos vértices sean observaciones de la muestra dada. La profundidad se define como la probabilidad de que ese punto esté dentro del polígono construido.

Para el cálculo de las funciones de profundidad de Liu y Tukey se empleará el paquete estadístico *depth* del programa R [12].

## 5.2. Rango multivariante

La clasificación por rangos en el caso multivariante [3] indica el grado de centralidad de una observación con respecto a las demás, es decir, después de hallar las profundidades de cada una de ellas se procede a ponderar entre la cantidad total de observaciones el número el veces que dicho valor es menor o igual a todos los demás valores de profundidad.

En el caso multivariante el R-estadístico de clasificación por rangos  $r(\cdot)$  para cada observación se calcula mediante la siguiente expresión:

$$r(x_i) = \frac{\#\{y_j | D(y_j) \leq D(x_i), j=1, \dots, n\}}{n}$$

*Ejemplo.- Haciendo uso de los datos aleatorios generados de una distribución normal bivariada se procede a calcular el valor de los rangos para cada una de las observaciones haciendo uso de las definiciones de profundidad de Mahalanobis ( $r_M$ ), Tukey ( $r_T$ ) y Liu ( $r_L$ ).*

| Observación | $D_M$      | $D_T$ | $D_L$     | $r_M$ | $r_T$ | $r_L$ |
|-------------|------------|-------|-----------|-------|-------|-------|
| 1           | 0,30015115 | 0,05  | 0,15      | 0,65  | 0,80  | 0,75  |
| 2           | 0,26501797 | 0,05  | 0,15      | 0,80  | 0,80  | 0,75  |
| 3           | 0,84286318 | 0,40  | 0,3850877 | 0,05  | 0,05  | 0,05  |
| 4           | 0,42425716 | 0,15  | 0,2552631 | 0,45  | 0,45  | 0,35  |
| 5           | 0,25322843 | 0,05  | 0,15      | 0,75  | 0,80  | 0,75  |
| 6           | 0,35417080 | 0,10  | 0,1780702 | 0,55  | 0,55  | 0,50  |
| 7           | 0,44151988 | 0,10  | 0,1780702 | 0,40  | 0,55  | 0,50  |
| 8           | 0,59960744 | 0,20  | 0,2964912 | 0,20  | 0,35  | 0,20  |
| 9           | 0,30636957 | 0,15  | 0,2543862 | 0,60  | 0,45  | 0,40  |
| 10          | 0,46560084 | 0,20  | 0,2622807 | 0,35  | 0,35  | 0,30  |
| 11          | 0,52367248 | 0,20  | 0,2868421 | 0,30  | 0,35  | 0,25  |
| 12          | 0,62336271 | 0,25  | 0,3192982 | 0,15  | 0,15  | 0,15  |
| 13          | 0,42206090 | 0,05  | 0,15      | 0,50  | 0,80  | 0,75  |
| 14          | 0,89804490 | 0,05  | 0,15      | 0,70  | 0,80  | 0,75  |
| 15          | 0,78053288 | 0,30  | 0,3561403 | 0,10  | 0,10  | 0,10  |
| 16          | 0,21482139 | 0,00  | 0,00      | 0,85  | 1,00  | 1,00  |
| 17          | 0,53708726 | 0,20  | 0,1473684 | 0,25  | 0,35  | 0,80  |
| 18          | 0,04875751 | 0,00  | 0,00      | 1,00  | 1,00  | 1,00  |
| 19          | 0,13123919 | 0,00  | 0,00      | 0,95  | 1,00  | 1,00  |
| 20          | 0,13228612 | 0,00  | 0,00      | 0,90  | 1,00  | 1,00  |

Tabla 1: “Comparativa entre profundidades”

Podemos observar en la tabla anterior que a pesar de que los datos utilizados para el cálculo de los diferentes rangos son los mismos, el valor de los rangos difiere según la definición de profundidad empleada.

### 5.3. Gráfica de control multivariante $r$

Para construir la gráfica de control  $r$  o de clasificación por rangos ( $r$ -chart) se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se calcula el vector de medias, la matriz de varianzas-covarianzas y la profundidad de cada uno de los datos,  $D(y_i)$  con  $i=1,2,\dots,m$ .
2. Se obtienen los estadísticos de orden de las  $D(y_i)$  con  $i=1,2,\dots,m$  y se denotan como  $y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[m]}$ .
3. Sean  $x_1, x_2, \dots$  las nuevas observaciones, las cuales se supone que siguen una distribución continua. Para cada observación se obtiene su profundidad.
4. Se calcula el rango  $r(\cdot)$  para cada una de las observaciones.
5. Se grafican los estadísticos de clasificación por rangos de cada  $X_i$  respecto al tiempo, con un límite central de control  $CL=0.5$  y un límite inferior de control  $LC = \alpha$ . Donde  $\alpha$  es llamada proporción de alarma.

Liu demostró que éste estadístico sigue una distribución uniforme en el intervalo  $[0,1]$ .

Para proceder a realizar el gráfico de control  $r$  debemos calcular cada  $r_i$ , y posteriormente, definimos sus parámetros de control como:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{Línea Central} &= 0.5 \\ LC &= \alpha \end{aligned}$ |
|---|

El proceso es declarado fuera de control si algún  $r_n(x)$  está por debajo del valor del LC.

#### 5.4. Gráfico de control multivariante $Q$

Al igual que el caso univariante el gráfico de control  $Q$  es similar al gráfico  $\bar{X}$ . Para construirlo se procede primero a hallar la función de profundidad a través de la definición de Mahalanobis, pero también es posible utilizar las definiciones de Tukey y Liu ya que ofrecen resultados muy similares, y a continuación el estadístico de clasificación por rangos  $r(\cdot)$

Donde la distribución empírica de  $X$  viene definida como

$$Q = P\{D(Y) \leq D(X)\}$$

$$Q(r) = (1/n) \sum_{i=1}^n r(X_i)$$

Si el tamaño de cada muestra  $n$  es mayor o igual a 5 y los parámetros de la distribución son conocidos:

$$\text{Línea central} = 0.5$$

$$LC = 0.5 - z_{\alpha}(12n)^{-1/2}$$

Si el tamaño de cada muestra  $n$  es mayor o igual a 5 y los parámetros de la distribución son desconocidos:

$$\text{Línea central} = 0.5$$

$$LC = 0.5 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}{2}}$$

Si el valor de  $n$  es menor que 5 y el valor de  $\alpha$  es pequeño:

$$\text{Línea central} = 0.5$$

$$LC = (n! \alpha)^{1/n} / n$$

El proceso es declarado fuera de control si algún  $r_n(x)$  está por debajo del valor del LC.



### 5.5. Gráfico de control multivariante $S$ y $S^*$

El gráfico de control  $S$  multivariante está basado también en el gráfico CUSUM al igual que el caso univariante. La idea del gráfico de control CUSUM viene sugerida naturalmente por el valor de  $S_n$ , el cuál viene definido a continuación.

Para la elaboración del gráfico de control  $S$  primero debemos hallar la función de profundidad y a continuación el estadístico  $r_n$ . A continuación calculamos  $S_n$ :

$$S_n = \sum_{i=1}^n [r(X_i) - \frac{1}{2}]$$

A continuación definimos los parámetros de control como:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{Línea Central} &= 0 \\ \text{LC} &= -(z_\alpha(n/12)^{1/2}) \end{aligned}$ |
|---|

En ocasiones podemos encontrarnos con casos en los que el tamaño de la muestra  $n$  es grande por lo que es mejor construir el gráfico de control  $S^*$ . Para construir este gráfico de control tenemos que hallar primero  $S_n^*$

$$S_n^* = S_n / \sqrt{n/12}$$

Cuyos parámetros de control son:

|   |
|---|
| $\begin{aligned} \text{Línea central} &= 0 \\ \text{LC} &= -z_\alpha \end{aligned}$ |
|---|

Cuando alguno de los puntos se encuentre por debajo del LC se dice que el proceso está fuera de control estadístico y hay que proceder a corregir y eliminar las causas que hayan podido provocarlo.

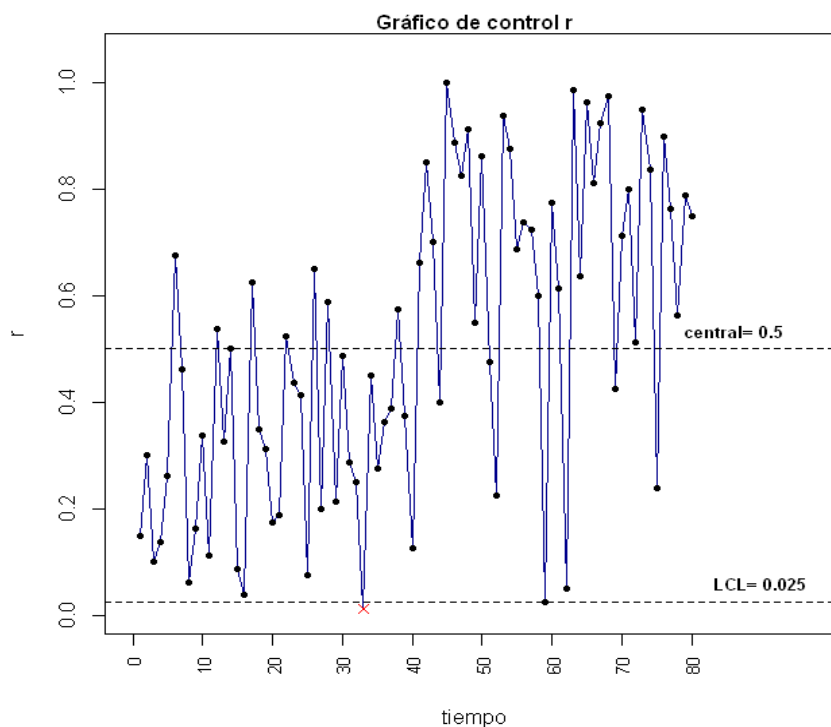
*Ejemplo.- Siguiendo las recomendaciones de Liu, para simular los gráficos de control multivariantes basados en rangos procedemos a construir una distribución  $F$  y otra  $G$  para generar valores de características multivariantes. Se elige que sigan una distribución normal simplemente por el hecho de hacer más fácil su discusión ya que la normalidad no es una condición necesaria para aplicar los gráficos de control basados en rangos.*

Lo primero que se debe hacer es generar 540 puntos de la distribución  $G \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  nombrando los primeros 500 como  $Y_1, \dots, Y_{500}$  y los últimos 40 como  $X_1, \dots, X_{40}$ . A continuación generamos otros 40 puntos de la distribución  $F \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$  y los nombramos como  $X_{41}, \dots, X_{80}$ . Notemos que claramente hay un cambio brusco de la media entre la primera mitad y la última de los datos  $X_i$  por que en un principio hemos de esperar que nuestros gráficos de control detecten dicho cambio. Para cada uno de los datos  $X_i$  hallamos su función de profundidad de Mahalanobis.

Para la construcción del gráfico de control  $r$  tomamos como parámetros de control  $CL = 0$  y  $LC = 0.025$ . Podemos observar claramente que las primeras 40 observaciones y las últimas 40 tienen diferentes medias tal y que además una de ellas se encuentra por debajo del límite de control inferior. (*Figura 20*).

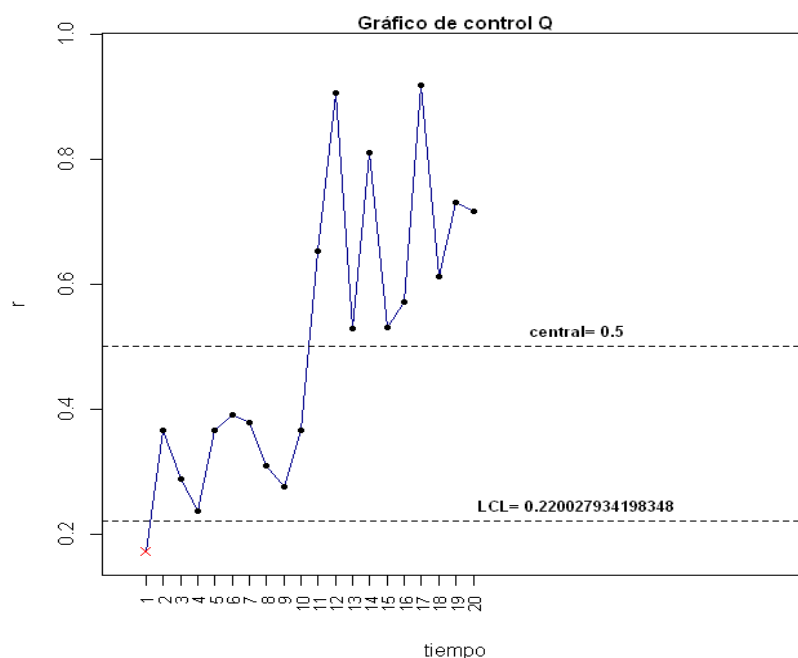
En la elaboración del gráfico de control  $Q$  hemos realizados dos gráficos con tamaños muestrales  $n=4$  y  $n=10$ . Para la *Figura 21* vemos que el límite de control inferior es de 0.3452 y para la *Figura 22* es de 0.2316. Para el primer caso vemos que más de uno de los puntos se encuentra debajo del límite de control inferior por lo tanto se encuentra fuera de control y habría que proceder a eliminar las muestras defectuosas y a estudiar cuales son las causas asignables que han podido ocasionarlo.

Por último construimos el gráfico de control  $S$ . En esta ocasión realizamos el  $S^*$  debido a que el número de observaciones es elevado. En estas condiciones el límite de control inferior es -1.96. Debido a que encontramos muestras que se encuentran por debajo de dicho límite, el proceso se encuentra fuera de control estadístico (*Figura 23*)



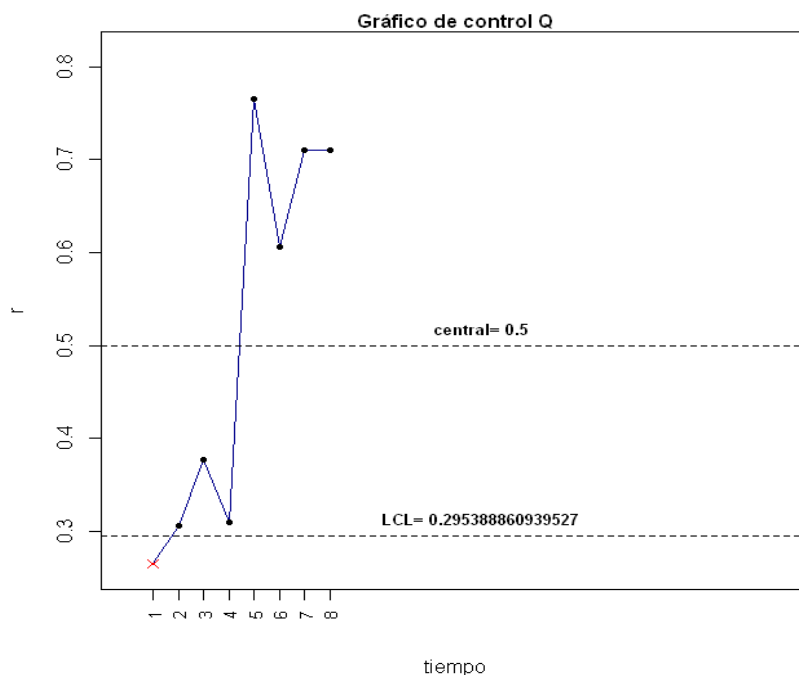
Comandos: `profM(X,covZ,samplemean)`  
`rangoprof(D)`  
`graf.control.rQ(r,n=5,alfa=0.01)`

Figura 20: "Gráfico de control r"



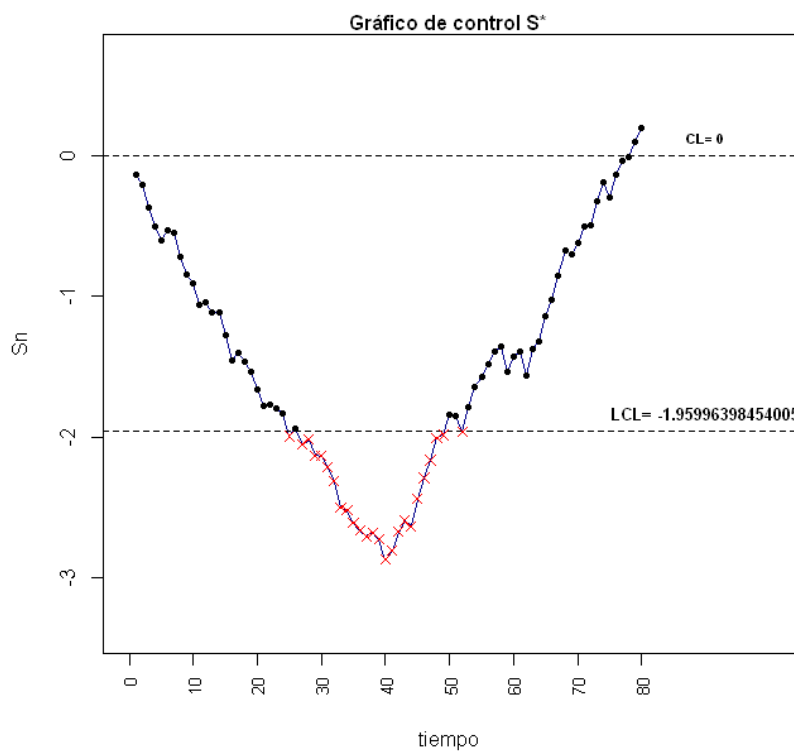
Comandos: `profM(X,covZ,samplemean)`  
`rangoprof(D)`  
`graf.control.rQ(r,n=4,alfa=0.01)`

Figura 21: "Gráfico de control Q (n=4)"



Comandos: `profM (X,covZ,samplemean)`  
`rangoprof (D)`  
`graf.control.rQ (r,n=10,alfa=0.01)`

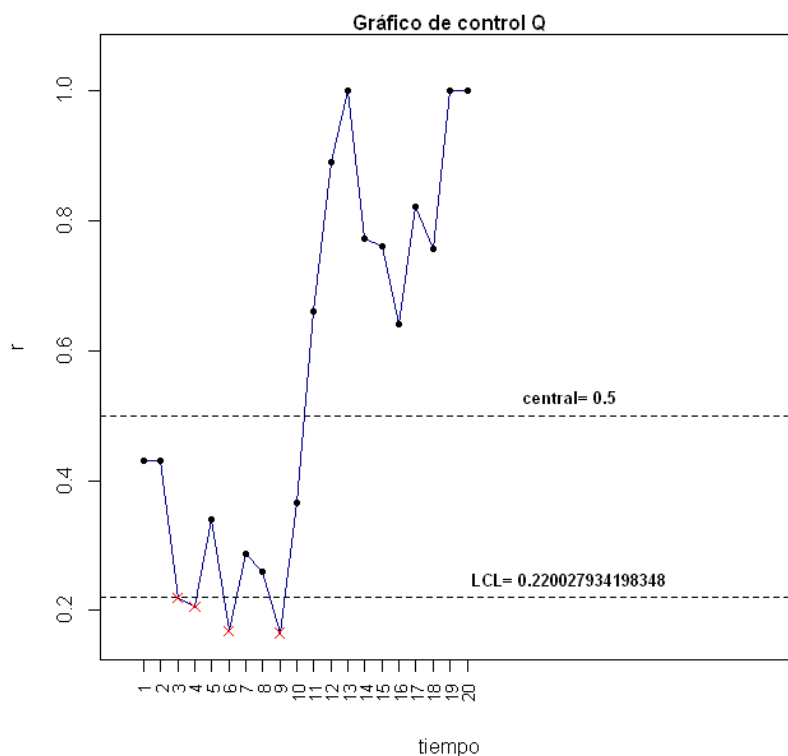
Figura 22: “Gráfico de control Q (n=10)”



Comandos: `profM (X,covZ,samplemean)`  
`rangoprof (D)`  
`grafcontrolS (r,alfa=0.01)`

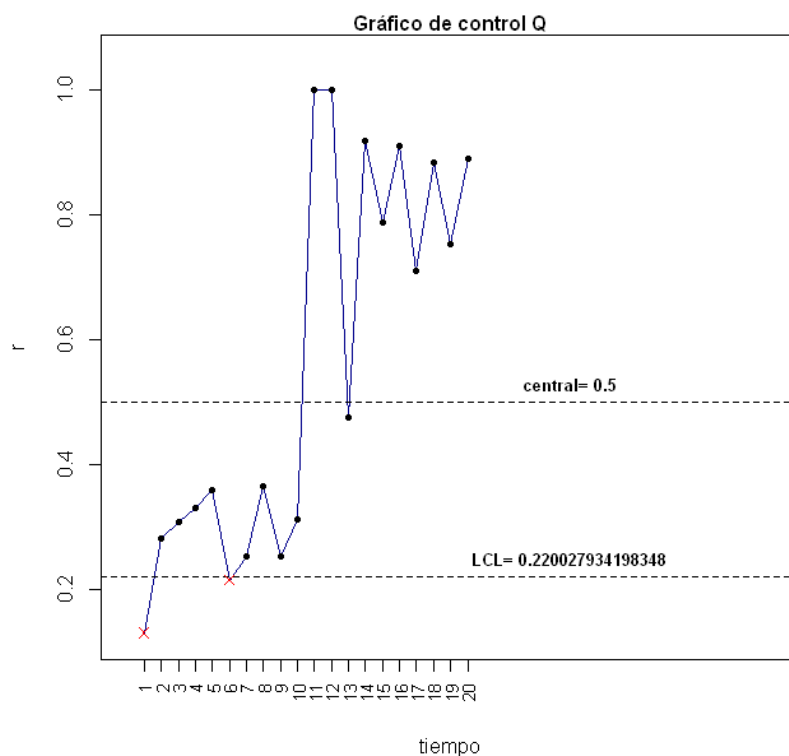
Figura 23: “Gráfico de control multivariante S\*”

Todos los gráficos de control anteriores se han realizado a través de la definición de profundidad de Mahalanobis. A modo de práctica se presentan los gráficos Q (n=4) aplicando las definiciones de profundidad aportadas por Tukey y Liu, comprobándose además que los resultados obtenidos no difieren muchos de los obtenidos a través de Mahalanobis.



Comandos: profT (X)  
rangoprof (D)  
graf.control.rQ (r,n=4,alfa=0.01)

Figura 24: “Gráfico de control Q (n=4). Tukey”



Comandos: profL (X)  
rangoprof (D)  
graf.control.rQ (r,n=4,alfa=0.01)

Figura 25: “Gráfico de control Q (n=4). Liu”

## 5.6. Gráficos de control $T^2$ de Hotelling

El procedimiento de monitoreo y control del proceso con variables múltiples más conocido es la carta de control  $T^2$  de Hotelling. Se trata de un proceso análogo al del gráfico de control  $\bar{X}$  de Shewhart para una variable. Se presentan dos versiones del gráfico de control  $T^2$ , uno para datos subagrupados y otro para observaciones individuales. Es importante resaltar que los gráficos de control  $T^2$  se utilizan bajo el supuesto de normalidad de las variables estudiadas.

### 5.6.1. Observaciones individuales

Normalmente en los procesos industriales el tamaño que se toma de cada muestra es  $n=1$ . Puesto que normalmente en una industria es común tener que monitorear características de la calidad multiples, las gráficas de control multivariantes con  $n=1$  son de gran utilidad.

Sean  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $S$  el vector de la media muestral y la matriz covarianza de las observaciones respectivamente. Se define el estadístico  $T^2$  de Hotelling como:

$$T^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' S^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

Cuando el número de observaciones es  $n < 100$  los límites de control para este gráfico de control vienen definidos por:

$$\begin{aligned} \text{LCS} &= \frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np} \\ \text{LCI} &= 0 \end{aligned}$$

Donde  $p$  define el número de variables de calidad estudiadas.

En el caso en el que el número de observaciones sea  $n > 100$ , los límites de control se basan en la distribución  $\beta$ . Estos límites se definen como:

$$\begin{aligned} \text{LCS} &= \frac{(n-1)^2}{n} \beta_{\alpha, p/2, (n-p-1)/2} \\ \text{LCI} &= 0 \end{aligned}$$

Para graficar el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling representamos el estadístico  $T^2$  frente al número de observaciones. Si alguna está fuera de los límites de control, se considera que el proceso no está bajo control estadístico y habría que proceder a buscar la causa asignable y retirar las muestras defectuosas.

### 5.6.2. Datos subagrupados

En el caso en el que se tomen muestras de tamaño  $n > 1$  el estadístico  $T^2$  viene definido por:

$$T^2 = k (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}})' S^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}})$$

Los límites de control para el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling en este caso son:

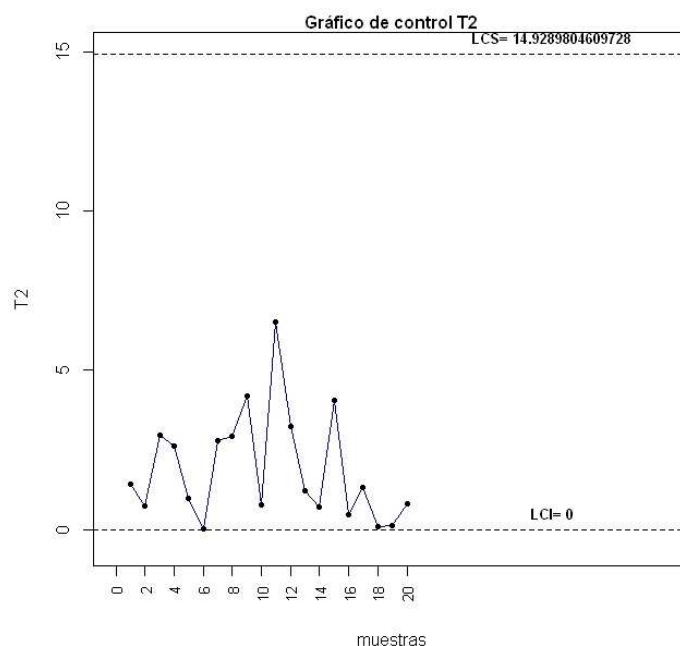
$$\begin{aligned} \text{LCS} &= \frac{p(n-1)(k-1)}{nk-n-p+1} F_{\alpha, p, nk-n-p+1} \\ \text{LCI} &= 0 \end{aligned}$$

Como ejemplo del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling se han cogido como datos los recogidos en la tabla 10-1 de la página 519 del libro “Control Estadístico de la Calidad” de Montgomery.

*Ejemplo.- La resistencia a la tensión ( $x_1$ ) en psi y el diámetro( $x_2$ ) en pulgadas de una fibra textil son dos características de la calidad importantes que deben controlarse conjuntamente. El ingeniero de calidad ha decidido usar  $k=10$  ejemplares de prueba de la fibra en cada muestra. Ha tomado  $n=20$  muestras preliminares.*

Con base a estos datos se ha concluido que  $\bar{x}_1=115.59\text{psi}$ ,  $\bar{x}_2=1.06$  pulgadas, y la matriz de covarianzas es  $\begin{pmatrix} 0.1472 & -0.001468 \\ -0.001468 & 0.00071 \end{pmatrix}$ . Procedemos a la representación del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling con  $\alpha=0.001$ , entonces el  $\text{LCS} = 14.9289$ .

Podemos observar en la *Figura 26* que ninguno de los puntos excede el límite de control superior, por lo que se concluye que el proceso está bajo control.



*Comando:* graf.control.T2<-function(X,alfa,n)

*Figura 26:* “Gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para  $\alpha=0.01$ ”



### 5.7. Comparativa entre el gráfico $T^2$ de Hotelling y el gráfico $r$

Cuando en un proceso industrial se tienen varias características a controlar, generalmente se construye una gráfica Shewhart para cada una de ellas. En este caso, hay dos suposiciones subyacentes: sus mediciones sucesivas no están correlacionadas y se distribuyen siguiendo una distribución normal.

Sin embargo, normalmente las características a controlar están correlacionadas de tal forma que cambios en una característica pueden afectar a la media o a la variabilidad de las restantes.

Si se desea controlar varias características simultáneamente la herramienta más usada es el gráfico de control multivariante propuesto por Hotelling basado en el estadístico  $T^2$ . En este caso se supone que las características a controlar siguen una distribución normal. Sin embargo, la normalidad de las observaciones no siempre se puede suponer.

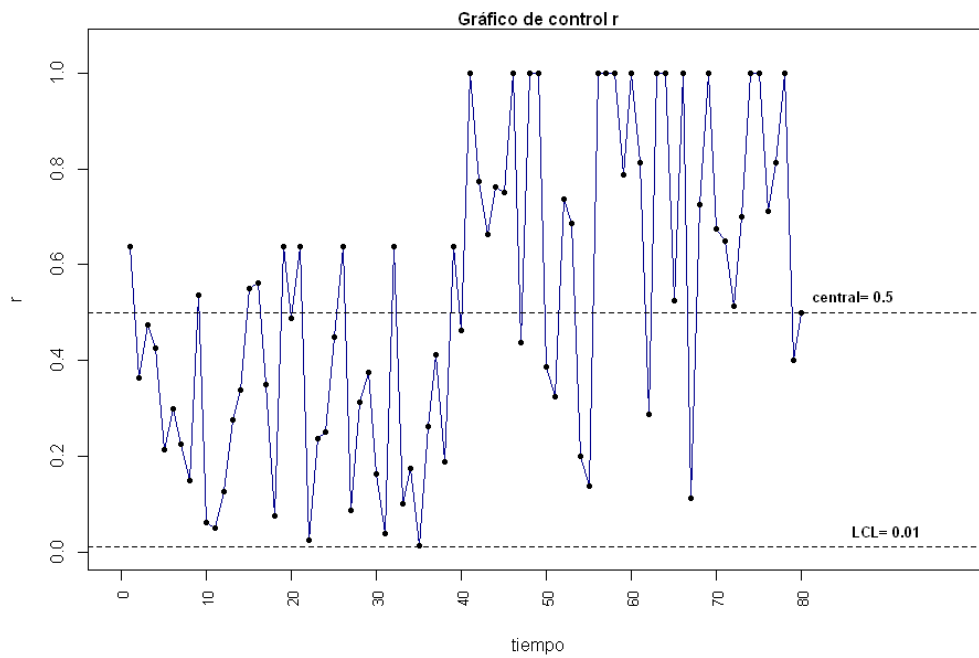
Liu propone como alternativa los gráficos de control multivariante no paramétricos basados en la profundidad de datos (ver [3] y [10]), ya que en ellos la suposición de normalidad en los datos no es necesaria.

Para ilustrar la comparativa entre ambos tipos de gráficos se toma como ejemplo una muestra de observaciones que siguen una distribución exponencial.

*Ejemplo.- Se generan 100 observaciones bivariantes con  $\lambda=0.5$  y otras 40 con  $\lambda=4$ . A continuación tomamos las últimas 40 observaciones de la primera muestra generada y las otras 40 de la segunda muestra, formando así una lista de 80 observaciones para dos variables del proceso.*

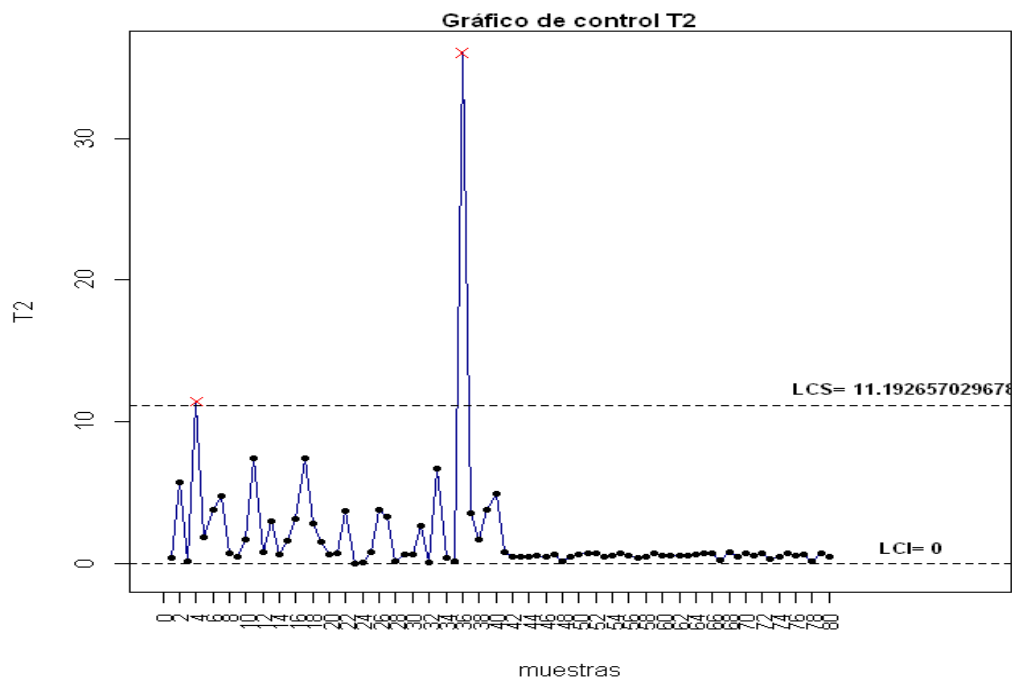
A primera vista si observamos los resultados de las simulaciones en las Figuras 27 y 28 podemos ver claramente que en la gráfica de control  $r$  se diferencia cuando se trata de la primera muestra de observaciones generadas o de la segunda, debido a la diferencia de medias existente entre ellas.

Cuando las variables son generadas de una distribución no-normal como en este caso (distribución exponencial) el desempeño del método no paramétrico es mejor que el de la  $T^2$  de Hotelling. Por otro lado, si observamos los ejemplos generados de distribuciones normales para ambos tipos de gráficas, el desempeño de la gráfica  $T^2$  de Hotelling es más eficiente a menos que el cambio en la media de las variables sea grande, pues en tal caso ambas gráficas parecen tener un desempeño similar.



Comandos: `profL (X)`  
`rangoprof (D)`  
`graf.control.rQ (r,n=1,alfa=0.01)`

Figura 27: “Gráfica de control r. Comparativa con  $T^2$ ”



Comando: `graf.control.T2 (X,n=1,alfa=0.01)`

Figura 28: “Gráfica de control  $T^2$  de Hotelling. Comparativa”



# Capítulo 6

## Memoria económica

En la memoria económica se realiza un análisis del tiempo empleado en el desarrollo de este proyecto y del valor monetario que éste tendría en el mercado laboral

## 6. Memoria económica

El presupuesto necesario para el desarrollo del proyecto depende de varios factores, lo más importante es el número de horas necesarias para su realización, es decir, las horas de estudio previo para la adquisición de los conocimientos necesarios, el desarrollo de los diferentes códigos en R para la implementación y estudio de los diferentes gráficos de control y las horas dedicadas en la preparación y redacción de la documentación.

Se debe considerar las horas dedicadas a la realización de un proyecto de estas características, por lo que el coste final varía según las horas de ingeniería empleadas y según la experiencia del ingeniero profesional en este campo. También habría que considerar el coste del software utilizado, que en este caso, es nulo ya que se trata de un software de libre circulación y gratuito.

En esta memoria económica se ha considerado que el proyectista es un ingeniero junior, por lo que se ha estimado un precio horario de 40€/h.

| Tarea                                | Horas (h) | Precio por hora (€/h) | Coste (€) |
|--------------------------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| Estudio previo                       | 22        | 40                    | 880       |
| Desarrollo e implementación en R     | 20        | 40                    | 800       |
| Corrección de errores y simulaciones | 30        | 40                    | 1200      |
| Redacción de la documentación        | 60        | 40                    | 2400      |
|                                      |           | <b>Total</b>          | 5280      |



# Capítulo 7

## Conclusiones

Este capítulo contiene una visión personal acerca de las conclusiones obtenidas y objetivos conseguidos tras la elaboración de este proyecto.

## 7.1. Conclusiones

En el desarrollo de este proyecto se ha presentado un estudio comparativo entre diferentes tipos de gráficos de control a través del desarrollo del software necesario para su implementación y representación.

Utilizando recursos estadísticos tales como las curvas de operación característica (OC) se ha podido llegar a las diferentes conclusiones acerca de la eficacia de los diferentes métodos a la hora de realizar un gráfico de control.

El gran problema que suponía el uso de los gráficos de control clásicos y similares, tales como el gráfico  $T^2$  de Hotelling, residía en el supuesto de la normalidad en las observaciones del proceso estudiado. Se ha podido comprobar la eficacia de los gráficos de control no paramétricos desarrollados por Regina Liu tanto en el caso univariante como en el multivariante.

En el caso univariante, los gráficos propuestos por Shewhart no contemplan el uso de datos que no sigan una distribución normal mientras que los gráficos de control basados en R-estadísticos presentan una respuesta más rápida y eficiente ante pequeñas perturbaciones en el proceso, además su validez no depende de la distribución de las muestras estudiadas. Los nuevos gráficos no paramétricos presentados sirven también para otros rangos distintos a los considerados en este proyecto.

En el caso multivariante los gráficos de control  $r$ ,  $Q$  y  $S$  de Liu se construyen usando el concepto de profundidad de datos y son usados sobre todo para monitorear el proceso en el cual sea importante el estudio de más de una variable y pueden ser fácilmente interpretados como los gráficos de control clásicos  $\bar{X}$ ,  $\bar{X}$  y  $S$ . Estos gráficos pueden detectar fácilmente cambios en la ubicación y escala a lo largo del proceso y además al igual que en el caso univariante, tienen la ventaja frente a otros gráficos multivariantes como el  $T^2$  de Hotelling en el supuesto de que no requieren normalidad en los datos.

Se podría deducir que los gráficos propuestos por Liu y el gráfico  $T^2$  de Hotelling son similares debido a que ambos se basan en el concepto de profundidad de datos y en el caso de la profundidad de Mahalanobis, representa la distancia cuadrática de sus puntos respecto de su media. Sin embargo, en la construcción de los gráficos de control no paramétricos, la profundidad de Mahalanobis solo sirve como una herramienta para obtener los rangos (R-estadísticos) de las observaciones y aparte el uso de otras profundidades como las de Liu y Tukey conduce a conclusiones similares.

Cuando las variables son generadas de una distribución no-normal, el desempeño del método no paramétrico es mejor que el de la  $T^2$  de Hotelling. Por otro lado, si observamos los ejemplos generados de distribuciones normales para ambos tipos de gráficas, el desempeño de la gráfica  $T^2$  de Hotelling es más eficiente a menos que el cambio en la media de las variables sea grande, pues en tal caso ambas gráficas parecen tener un desempeño similar.



# Referencias



## Referencias

- [1] Montgomery D. C.; George C. Runger (1995). *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Montgomery D. C. (2004). *Control estadístico de la calidad*, 3ª ed., Wiley, Nueva York.
- [3] Regina Y. Liu (1995). Control charts for multivariate processes. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 90, No 432, Theory and Methods.
- [4] Cascos Ignacio, Ángel López y Juan Romo (2011). Data depth in Multivariate Statistics. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*. Vol. 27, No. 3, pp. 151-174.
- [5] Liu, R. (1990). On a notion of data depth based on random simplices. *Ann. Statist.*, 18:405-414.
- [6] R Development Core Team. *Introducción a R*. Version 1.0.1. Mayo de 2000. Disponible en web: <http://cran.r-project.org/doc/contrib/R-intro-1.1.0-espanol.1.pdf>
- [7] Emmanuel Paradis. *R para Principiantes*. Marzo de 2003. Disponible en Web: [http://cran.r-project.org/doc/contrib/rdebuts\\_es.pdf](http://cran.r-project.org/doc/contrib/rdebuts_es.pdf)
- [8] Juan Carlos Correa et al. *Gráficos estadísticos con R*. Enero 2002. Disponible en Web: <http://cran.r-project.org/doc/contrib/grafi3.pdf>
- [9] Mehmet Mert (2004). Nonparametric control charts based on mahalanobis depth. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. Vol. 22, pp 57-67.
- [10] Dr. Mario Cantú (2007). Sistema de control multivariado no paramétrico de procesos. *CULCyT*. No 21, pp 11-18.
- [11] César Pérez (1998). *Control estadístico de la calidad*. Rama Editorial, Madrid.
- [12] Maxime Genest, Jean-Claude Masse. *Depth Functions tools for multivariate analysis (package depth)*. Agosto 2012. Disponible en Web: <http://cran.r-project.org/web/packages/depth/depth.pdf>

- [13] Luca Scrucca. *Quality Control Charts*. Septiembre 2011. Disponible en Web <http://cran.r-project.org/web/packages/qcc/qcc.pdf>
- [14] Mahalanobis, P.C.(1936). On the generalised distance in statistics. Volume 2, pages 49-55.
- [15] Tukey, J.W. (1975). Mathematics and the picturing of data. In R. D. James, editor, *Proceedings of the International Congress of Mathematics (Vancouver, 1974)*, volume 2, pages 523-531.
- [16] Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley, Reading, MA.



# Anexos

En esta sección se presentan los diferentes anexos necesarios para completar el desarrollo de este trabajo. En el anexo I se incluye una tabla de constantes necesarias para la realización de los diferentes gráficos de control clásicos y en el II se da a conocer el código utilizado para la implementación de los gráficos de control  $X$ ,  $\bar{X}$ ,  $R$ ,  $CUSUM$ ,  $r$ ,  $Q$ ,  $S$  y  $S^*$ . Para finalizar en el anexo III se presentan los datos utilizados para la realización de las simulaciones

## Anexo I: Constantes para gráficos de control

| Constantes para Gráficos de Control |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n                                   | A     | A2    | A3    | c4    | 1/c4  | B3    | B4    | B5    | B6    | d2    | d3    | 1/d2  | D1    | D2    | D3    | D4    |
| 2                                   | 2.121 | 1.880 | 2.659 | 0.798 | 1.253 | 0.000 | 3.267 | 0.000 | 2.606 | 1.128 | 0.853 | 0.886 | 0.000 | 3.686 | 0.000 | 3.267 |
| 3                                   | 1.732 | 1.023 | 1.954 | 0.886 | 1.128 | 0.000 | 2.568 | 0.000 | 2.276 | 1.693 | 0.888 | 0.591 | 0.000 | 4.358 | 0.000 | 2.575 |
| 4                                   | 1.500 | 0.729 | 1.628 | 0.921 | 1.085 | 0.000 | 2.266 | 0.000 | 2.088 | 2.059 | 0.880 | 0.486 | 0.000 | 4.698 | 0.000 | 2.282 |
| 5                                   | 1.342 | 0.577 | 1.427 | 0.940 | 1.064 | 0.000 | 2.089 | 0.000 | 1.964 | 2.326 | 0.864 | 0.430 | 0.000 | 4.918 | 0.000 | 2.114 |
| 6                                   | 1.225 | 0.483 | 1.287 | 0.952 | 1.051 | 0.030 | 1.970 | 0.029 | 1.874 | 2.534 | 0.848 | 0.395 | 0.000 | 5.079 | 0.000 | 2.004 |
| 7                                   | 1.134 | 0.419 | 1.182 | 0.959 | 1.042 | 0.118 | 1.882 | 0.113 | 1.806 | 2.704 | 0.833 | 0.370 | 0.205 | 5.204 | 0.076 | 1.924 |
| 8                                   | 1.061 | 0.373 | 1.099 | 0.965 | 1.036 | 0.185 | 1.815 | 0.179 | 1.751 | 2.847 | 0.820 | 0.351 | 0.388 | 5.307 | 0.136 | 1.864 |
| 9                                   | 1.000 | 0.337 | 1.032 | 0.969 | 1.032 | 0.239 | 1.761 | 0.232 | 1.707 | 2.970 | 0.808 | 0.337 | 0.547 | 5.394 | 0.184 | 1.816 |
| 10                                  | 0.949 | 0.308 | 0.975 | 0.973 | 1.028 | 0.284 | 1.716 | 0.276 | 1.669 | 3.078 | 0.797 | 0.325 | 0.686 | 5.469 | 0.223 | 1.777 |
| 11                                  | 0.905 | 0.285 | 0.927 | 0.975 | 1.025 | 0.321 | 1.679 | 0.313 | 1.637 | 3.173 | 0.787 | 0.315 | 0.811 | 5.535 | 0.256 | 1.744 |
| 12                                  | 0.866 | 0.266 | 0.886 | 0.978 | 1.023 | 0.354 | 1.646 | 0.346 | 1.610 | 3.258 | 0.778 | 0.307 | 0.923 | 5.594 | 0.283 | 1.717 |
| 13                                  | 0.832 | 0.249 | 0.850 | 0.979 | 1.021 | 0.382 | 1.618 | 0.374 | 1.585 | 3.336 | 0.770 | 0.300 | 1.025 | 5.647 | 0.307 | 1.693 |
| 14                                  | 0.802 | 0.235 | 0.817 | 0.981 | 1.019 | 0.406 | 1.594 | 0.398 | 1.563 | 3.407 | 0.763 | 0.294 | 1.118 | 5.696 | 0.328 | 1.672 |
| 15                                  | 0.775 | 0.223 | 0.789 | 0.982 | 1.018 | 0.428 | 1.572 | 0.421 | 1.544 | 3.472 | 0.756 | 0.288 | 1.203 | 5.740 | 0.347 | 1.653 |
| 16                                  | 0.750 | 0.212 | 0.763 | 0.983 | 1.017 | 0.448 | 1.552 | 0.440 | 1.527 | 3.532 | 0.750 | 0.283 | 1.282 | 5.782 | 0.363 | 1.637 |
| 17                                  | 0.728 | 0.203 | 0.739 | 0.985 | 1.016 | 0.466 | 1.534 | 0.459 | 1.510 | 3.588 | 0.744 | 0.279 | 1.356 | 5.820 | 0.378 | 1.622 |
| 18                                  | 0.707 | 0.194 | 0.718 | 0.985 | 1.015 | 0.482 | 1.518 | 0.475 | 1.496 | 3.640 | 0.739 | 0.275 | 1.424 | 5.856 | 0.391 | 1.609 |
| 19                                  | 0.688 | 0.187 | 0.698 | 0.986 | 1.014 | 0.497 | 1.503 | 0.490 | 1.483 | 3.689 | 0.733 | 0.271 | 1.489 | 5.889 | 0.404 | 1.596 |
| 20                                  | 0.671 | 0.180 | 0.680 | 0.987 | 1.013 | 0.510 | 1.490 | 0.503 | 1.470 | 3.735 | 0.729 | 0.268 | 1.549 | 5.921 | 0.415 | 1.585 |
| 21                                  | 0.655 | 0.173 | 0.663 | 0.988 | 1.013 | 0.523 | 1.477 | 0.516 | 1.459 | 3.778 | 0.724 | 0.265 | 1.606 | 5.951 | 0.425 | 1.575 |
| 22                                  | 0.640 | 0.167 | 0.647 | 0.988 | 1.012 | 0.534 | 1.466 | 0.528 | 1.448 | 3.819 | 0.720 | 0.262 | 1.660 | 5.979 | 0.435 | 1.565 |
| 23                                  | 0.626 | 0.162 | 0.633 | 0.989 | 1.011 | 0.545 | 1.455 | 0.539 | 1.438 | 3.858 | 0.716 | 0.259 | 1.711 | 6.006 | 0.443 | 1.557 |
| 24                                  | 0.612 | 0.157 | 0.619 | 0.989 | 1.011 | 0.555 | 1.445 | 0.549 | 1.429 | 3.895 | 0.712 | 0.257 | 1.759 | 6.032 | 0.452 | 1.548 |
| 25                                  | 0.600 | 0.153 | 0.606 | 0.990 | 1.010 | 0.565 | 1.435 | 0.559 | 1.420 | 3.931 | 0.708 | 0.254 | 1.805 | 6.056 | 0.459 | 1.541 |

**Anexo II: Resumen funciones para implementación en R de las gráficas de control univariantes y multivariantes**

| Funciones                                       | Descripción  |
|---|--|
| <b>graf.control.R</b><br>(x,n,alfa)             | <b>Input</b><br>x vector con observaciones de la característica de interés<br>n tamaño muestral<br>alfa nivel de significación<br><br><b>Output</b><br>Representa el gráfico de control para R de Shewhart   |
| <b>graf.control.X</b><br>(x, n, alfa)           | <b>Input</b><br>x vector con observaciones de la característica de interés<br>n tamaño muestral<br>alfa nivel de significación<br><br><b>Output</b><br>Representa el gráfico de control para la media de Shewhart con desviación típica estimada a partir de rangos                      |
| <b>graf.control.R2</b><br>(x,n,LCS,central,LCI) | <b>Input</b><br>x vector con observaciones de la característica de interés<br>n tamaño muestral<br>LCS límite de control superior<br>central línea central<br>LCI límite de control inferior<br><br><b>Output</b><br>Representa el gráfico de control para R de Shewhart para la fase II |
| <b>graf.control.X2</b><br>(x,n,LCS,central,LCI) | <b>Input</b><br>x vector con observaciones de la característica de interés<br>n tamaño muestral<br>LCS límite de control superior<br>central línea central<br>LCI límite de control inferior   |

|   |  |
|---|--|
|   | <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control para la media de Shewhart. Fase II</p>   |
| <p><b>graf.control.S</b><br/>(x,n,alfa)</p>               | <p><b>Input</b><br/>x vector con observaciones de la característica de interés<br/>n tamaño muestral<br/>alfa nivel de significación</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control para S de Shewhart</p>                          |
| <p><b>graf.cusum(x)</b></p>                               | <p><b>Input</b><br/>x vector con observaciones de la característica de interés</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de las sumas acumuladas de x</p>   |
| <p><b>graf.controlcusumpos</b><br/>(x,mu0,sd.proceso)</p> | <p><b>Input</b><br/>x vector con observaciones de la característica de interés<br/>mu0 media del proceso<br/>sd.proceso desviación estándar del proceso</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control cusum superior (tabular)</p> |
| <p><b>graf.controlcusumneg</b><br/>(x,mu0,sd.proceso)</p> | <p><b>Input</b><br/>x vector con observaciones de la característica de interés<br/>mu0 media del proceso<br/>sd.proceso desviación estándar del proceso</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control cusum inferior (tabular)</p> |
| <p><b>graf.control.rQ</b><br/>(r,n,alfa)</p>              | <p><b>Input</b><br/>r vector de rangos ordinales de las observaciones de la característica de interés<br/>n tamaño muestral<br/>alfa nivel de significación</p>  |

|  |   |
|--|---|
|  | <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control <math>r</math> cuando el tamaño muestral es <math>n=1</math> y el gráfico de control <math>Q</math> si el tamaño muestral es <math>n&gt;1</math></p>  |
| <p><b>graf.control.rQ2</b><br/><b>(r,n,alfa,LCL)</b></p> | <p><b>Input</b><br/><b>r</b> vector de rangos ordinales de las observaciones de la característica de interés<br/><b>n</b> tamaño muestral<br/><b>alfa</b> nivel de significación<br/><b>LCL</b> límite de control</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control <math>r</math> cuando el tamaño muestral es <math>n=1</math> y el gráfico de control <math>Q</math> si el tamaño muestral es <math>n&gt;1</math>. Fase II</p> |
| <p><b>grafcontrolS</b><br/><b>(r,alfa)</b></p>           | <p><b>Input</b><br/><b>r</b> vector de rangos ordinales de las observaciones de la característica de interés<br/><b>alfa</b> nivel de significación</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control <math>S</math> de Liu</p>   |
| <p><b>graf.control.T2</b><br/><b>(X,n,alfa)</b></p>      | <p><b>Input</b><br/><b>X</b> matrix que contiene las observaciones multivariantes<br/><b>n</b> tamaño muestral<br/><b>alfa</b> nivel de significación</p> <p><b>Output</b><br/>Representa el gráfico de control <math>T^2</math> de Hotelling</p>   |
| <p><b>profM</b><br/><b>(X,covX,samplemean)</b></p>       | <p><b>Input</b><br/><b>X</b> matriz que contiene las observaciones multivariantes<br/><b>covZ</b> matriz de varianzas-covarianzas<br/><b>samplemean</b> vector de medias de las observaciones multivariantes</p> <p><b>Output</b><br/>Vector de profundidades de las observaciones estudiadas, según la definición de profundidad de Mahalanobis</p>  |

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>profL(X)</b>     | <p><b>Input</b><br/>X matriz que contiene las observaciones multivariantes</p> <p><b>Output</b><br/>Vector de profundidades de las observaciones estudiadas, según la definición de profundidad de Liu</p> <p>Para usar esta función es necesario instalar previamente el paquete estadístico <i>depth</i>.</p>   |
| <b>profT(X)</b>     | <p><b>Input</b><br/>X matriz que contiene las observaciones multivariantes</p> <p><b>Output</b><br/>Vector de profundidades de las observaciones estudiadas, según la definición de profundidad de Tukey</p> <p>Para usar esta función es necesario instalar previamente el paquete estadístico <i>depth</i>.</p> |
| <b>Rangoprof(D)</b> | <p><b>Input</b><br/>D vector de profundidades de las observaciones estudiadas</p> <p><b>Output</b><br/>Vector de rangos calculados a partir de profundidades</p>  |

**Tabla 2:** “Resumen funciones para la representación de las gráficas de control en R”



### Anexo III: Ficheros en R para la construcción de los graficos de control

|                      | Gráficos de control clásicos   |
|----------------------|--|
| grafcontrolmediayR.R | <pre> #FASE 1 #El siguiente código es para la representación del gráfico de control #para R.  graf.control.R&lt;-function(x,n,alfa) {  x&lt;-matrix(x,nrow=n) muestras&lt;-1:ncol(x) zalfamedio&lt;-qnorm(1-alfa/2,0,1)    if(nrow(x)==2){d2&lt;-1.128;d3&lt;-0.853}   if(nrow(x)==3){d2&lt;-1.693;d3&lt;-0.888}   if(nrow(x)==4){d2&lt;-2.059;d3&lt;-0.880}   if(nrow(x)==5){d2&lt;-2.326;d3&lt;-0.864}   if(nrow(x)==6){d2&lt;-2.534;d3&lt;-0.848}   if(nrow(x)==7){d2&lt;-2.704;d3&lt;-0.833}   if(nrow(x)==8){d2&lt;-2.847;d3&lt;-0.820}   if(nrow(x)==9){d2&lt;-2.970;d3&lt;-0.808}   if(nrow(x)==10){d2&lt;-3.078;d3&lt;-0.797}   if(nrow(x)==11){d2&lt;-3.173;d3&lt;-0.787}   if(nrow(x)==12){d2&lt;-3.258;d3&lt;-0.778}   if(nrow(x)==13){d2&lt;-3.336;d3&lt;-0.770}   if(nrow(x)==14){d2&lt;-3.407;d3&lt;-0.763}  r&lt;-apply(x,2,range) rangos&lt;-c(r[2,]-r[1,]) promedioR&lt;-mean(rangos) D4&lt;-1+zalfamedio*(d3/d2) D3&lt;-1-zalfamedio*(d3/d2) LCS&lt;-D4*promedioR central&lt;-promedioR LCI&lt;-D3*promedioR  plot(muestras,rangos,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(rangos)+8)), ,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(rangos))- 0.005,max(LCS,max(rangos))+0.005))  axis(1,1:(length(rangos)+3),cex.axis=0.8,las=2)  abline(h=central,lty=2) text((max(muestras)+8),promedioR,paste('Central=',promedioR),pos=3,font =2,cex=0.8)  abline(h=LCS,lty=2) text((max(muestras)+8),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=LCI,lty=2) text((max(muestras)+8),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)    for(i in 1:length(rangos)){      if((rangos[i]&gt;LCS) (rangos[i]&lt;LCI)){ </pre> |

grafcontrolmediayR.R

```

        points(muestras[i],rangos[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
        points(muestras[i],rangos[i],pch=20)
    }
}

mtext('Gráfico de control para R',side=3,font=2)

}

graf.control.R(xl,5,0.0027)

#Gráfica de control para la media

graf.control.X<-function(x,n,alfa) {

x<-matrix(x,nrow=n)
muestras<-1:ncol(x)
zalfamedio<-qnorm(1-alfa/2,0,1)

    if(nrow(x)==2){d2<-1.128}
    if(nrow(x)==3){d2<-1.693}
    if(nrow(x)==4){d2<-2.059}
    if(nrow(x)==5){d2<-2.326}
    if(nrow(x)==6){d2<-2.534}
    if(nrow(x)==7){d2<-2.704}
    if(nrow(x)==8){d2<-2.847}
    if(nrow(x)==9){d2<-2.970}
    if(nrow(x)==10){d2<-3.078}
    if(nrow(x)==11){d2<-3.173}
    if(nrow(x)==12){d2<-3.258}
    if(nrow(x)==13){d2<-3.336}
    if(nrow(x)==14){d2<-3.407}

r<-apply(x,2,range)
rangos<-c(r[2,]-r[1,])
promedioR<-mean(rangos)
medias<-c(apply(x,2,mean))
promediomedias<-mean(medias)
LCS<-promediomedias+(zalfamedio*promedioR)/(d2*sqrt(n))
central<-promediomedias
LCI<-promediomedias-(zalfamedio*promedioR)/(d2*sqrt(n))

plot(muestras,medias,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(medias)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(medias))-
0.005,max(LCS,max(medias))+0.005))

axis(1,1:(length(medias)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=central,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),promediomedias,paste('Central=',promediomedias
),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

```

grafcontrolmediayR.R

```

for(i in 1:length(medias)){
  if((medias[i]>LCS)|(medias[i]<LCI)){
    points(muestras[i],medias[i],pch=4,col="red")
  }
  else {
    points(muestras[i],medias[i],pch=20)
  }
}

mtext('Gráfico de control para la media',side=3,font=2)

}

graf.control.X(x1,5,0.0027)

#FASE 2

#Para esta fase de monitorización tenemos que tener en cuentas los
#valores de los límites de control
#hallados en los gráficos de control anteriores. Añadimos las 15
#observaciones posteriores.

X<-c(t(x1),t(x2))

#El siguiente código es para la representación del gráfico de control
para R.

graf.control.R2<-function(x,n,LCS,central,LCI) {

x<-matrix(x,nrow=n)
muestras<-1:ncol(x)
r<-apply(x,2,range)
rangos<-c(r[2,]-r[1,])
promedioR<-mean(rangos)

plot(muestras,rangos,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(rangos)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(rangos))-
0.005,max(LCS,max(rangos))+0.005))

axis(1,1:(length(rangos)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=central,lty=2)
text((max(muestras)+8),promedioR,paste('Central=',promedioR),pos=3,font
=2,cex=0.8)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(v=25.5,lty=2)

  for(i in 1:length(rangos)){
    if((rangos[i]>LCS)|(rangos[i]<LCI)){
      points(muestras[i],rangos[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
      points(muestras[i],rangos[i],pch=20)
    }
  }
}

```

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| <p>grafcontrolmediayR.R</p> | <pre> mtext('Gráfico de control para R',side=3,font=2)  }  graf.control.R2(X,5,0.0491526,0.023240,0)  #Gráfica de control para la media  graf.control.X2&lt;-function(x,n,LCS,central,LCI) {  x&lt;-matrix(x,nrow=n) muestras&lt;-1:ncol(x) r&lt;-apply(x,2,range) rangos&lt;-c(r[2,]-r[1,]) promedioR&lt;-mean(rangos) medias&lt;-c(apply(x,2,mean)) promediomedias&lt;-mean(medias)  plot(muestras,medias,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(medias)+8)), ,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(medias))- 0.005,max(LCS,max(medias))+0.005))  axis(1,1:(length(medias)+3),cex.axis=0.8,las=2)  abline(h=central,lty=2) text((max(muestras)+6.5),promediomedias,paste('Central=',promediomedias ),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=LCS,lty=2) text((max(muestras)+6.5),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=LCI,lty=2) text((max(muestras)+6.5),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(v=25.5,lty=2)    for(i in 1:length(medias)){     if((medias[i]&gt;LCS) (medias[i]&lt;LCI)){       points(muestras[i],medias[i],pch=4,col="red")     }     else {       points(muestras[i],medias[i],pch=20)     }   }  mtext('Gráfico de control para la media',side=3,font=2)  }  graf.control.X2(X,5,74.0145,74.0011,73.988) </pre> |
| <p>grafcontrolmediayS.R</p> | <pre> #FASE1 #El siguiente código es para la representación del gráfico de control para S.  graf.control.S&lt;-function(x,n,alfa) {  x&lt;-matrix(x,nrow=n) muestras&lt;-1:ncol(x) zalfamedio&lt;-qnorm(1-alfa/2,0,1) </pre>  |

grafcontrolmediayS.R

```

if(nrow(x)==2){C4<-0.7979}
if(nrow(x)==3){C4<-0.8862}
if(nrow(x)==4){C4<-0.9213}
if(nrow(x)==5){C4<-0.9400}
if(nrow(x)==6){C4<-0.9515}
if(nrow(x)==7){C4<-0.9594}
if(nrow(x)==8){C4<-0.9650}
if(nrow(x)==9){C4<-0.9693}
if(nrow(x)==10){C4<-0.9727}
if(nrow(x)==11){C4<-0.9754}
if(nrow(x)==12){C4<-0.9776}
if(nrow(x)==13){C4<-0.9794}
if(nrow(x)==14){C4<-0.9810}

desviacionestandar<-apply(x,2,sd)
promedioS<-mean(desviacionestandar)
LCS<-(1+zalfamedio*(sqrt(1-C4*C4)/C4))*promedioS
central<-promedioS
LCI<-(1-zalfamedio*(sqrt(1-C4*C4)/C4))*promedioS

plot(muestras,desviacionestandar,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(des
viacionestandar)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(desviacionestandar))-
0.005,max(LCS,max(desviacionestandar))+0.005))

axis(1,1:(length(desviacionestandar)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=central,lty=2)
text((max(muestras)+8),promedioS,paste('Central=',promedioS),pos=3,font
=2,cex=0.8)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

for(i in 1:length(desviacionestandar)){

  if((desviacionestandar[i]>LCS)|(desviacionestandar[i]<LCI)){
    points(muestras[i],desviacionestandar[i],pch=4,col="red")
  }
  else {
    points(muestras[i],desviacionestandar[i],pch=20)}
  }

mtext('Gráfico de control para S',side=3,font=2)

}

graf.control.S(x1,5,0.0027)

#Gráfico de control para la media

graf.control.X<-function(x,n,alfa) {

```

grafcontrolmediayS.R

```
x<-matrix(x,nrow=n)
zalfamedio<-qnorm(1-alfa/2,0,1)
muestras<-1:ncol(x)

if(nrow(x)==2){c4<-0.7979}
if(nrow(x)==3){c4<-0.8862}
if(nrow(x)==4){c4<-0.9213}
if(nrow(x)==5){c4<-0.9400}
if(nrow(x)==6){c4<-0.9515}
if(nrow(x)==7){c4<-0.9594}
if(nrow(x)==8){c4<-0.9650}
if(nrow(x)==9){c4<-0.9693}
if(nrow(x)==10){c4<-0.9727}
if(nrow(x)==11){c4<-0.9754}
if(nrow(x)==12){c4<-0.9776}
if(nrow(x)==13){c4<-0.9794}
if(nrow(x)==14){c4<-0.9810}

desviacionestandar<-apply(x,2,sd)
promedioS<-mean(desviacionestandar)
medias<-c(apply(x,2,mean))
promediomedias<-mean(medias)
LCS<-promediomedias+(zalfamedio*promedioS)/(c4*sqrt(n))
central<-promediomedias
LCI<-promediomedias-(zalfamedio*promedioS)/(c4*sqrt(n))

plot(muestras,medias,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(medias)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(medias))-
0.005,max(LCS,max(medias))+0.005))

axis(1,1:(length(medias)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=central,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),promediomedias,paste('Central=',promediomedias
),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+6.5),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

for(i in 1:length(medias)){
  if((medias[i]>LCS)|(medias[i]<LCI)){
    points(muestras[i],medias[i],pch=4,col="red")
  }
  else {
    points(muestras[i],medias[i],pch=20)
  }
}

mtext('Gráfico de control para la media',side=3,font=2)

}

graf.control.X(x1,5,0.0027)

#FASE 2

X<-cbind(t(x1),t(x2))
```

grafcontrolmediayS.R

```
#El siguiente código es para la representación del gráfico de control
#para S.

graf.control.S2<-function(x,n,LCS,central,LCI) {

x<-matrix(x,nrow=n)
muestras<-1:ncol(x)
desviacionestandar<-apply(x,2,sd)
promedioS<-mean(desviacionestandar)

plot(muestras,desviacionestandar,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(des
viacionestandar)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(desviacionestandar))-
0.005,max(LCS,max(desviacionestandar))+0.005))

axis(1,1:(length(desviacionestandar)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=central,lty=2)
text((max(muestras)+8),promedioS,paste('Central=',promedioS),pos=3,font
=2,cex=0.8)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+8),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(v=25.05,lty=2)

  for(i in 1:length(desviacionestandar)){
    if((desviacionestandar[i]>LCS)|(desviacionestandar[i]<LCI)){
      points(muestras[i],desviacionestandar[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
      points(muestras[i],desviacionestandar[i],pch=20)}
  }

  mtext('Gráfico de control para S',side=3,font=2)

}

graf.control.S2(X,5,0.01963552,0.0093994,0)

#Gráfico para la media

graf.control.X2<-function(x,n,LCS,central,LCI) {

x<-matrix(x,nrow=n)
muestras<-1:ncol(x)
desviacionestandar<-apply(x,2,sd)
promedioS<-mean(desviacionestandar)
medias<-c(apply(x,2,mean))
promediomedias<-mean(medias)

plot(muestras,medias,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(medias)+8)),
,col="darkblue",ylim=c(min(LCI,min(medias))-
0.005,max(LCS,max(medias))+0.005))

axis(1,1:(length(medias)+3),cex.axis=0.8,las=2)
```

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| <p>grafcontrolmediayS.R</p> | <pre> abline(h=central,lty=2) text((max(muestras)+6.5),promediomedias,paste('Central=',promediomedias),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=LCS,lty=2) text((max(muestras)+6.5),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=LCI,lty=2) text((max(muestras)+6.5),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(v=25.05,lty=3)  for(i in 1:length(medias)){   if((medias[i]&gt;LCS) (medias[i]&lt;LCI)){     points(muestras[i],medias[i],pch=4,col="red")   }   else {     points(muestras[i],medias[i],pch=20)   } }  mtext('Gráfico de control para la media',side=3,font=2) }  graf.control.X2(X,5,74.014585,74.0011,73.9877665) </pre> |
| <p>grafcontrolcusum.R</p>   | <pre> #Gráfica de sumas acumuladas  graf.cusum&lt;-function(x){ muestras&lt;-1:length(x) b&lt;-c(x-10) sumaacumulada&lt;-cumsum(b)  plot(muestras,sumaacumulada,type='l',col="darkblue")  points(sumaacumulada,pch=20)  abline(v=length(x1)+0.5,lty=2)  abline(h=0,lty=2) }  graf.cusum(x)  #Cusum tabular superior  graf.controlcusumpos&lt;-function(x,mu0,sd.proceso){  corrimiento&lt;-1*sd.proceso mul&lt;-mu0+corrimiento K&lt;-(mul-mu0)/2 Cplus&lt;-x muestras&lt;-1:length(x)  for(i in 1:(length(x)-1)) { </pre>   |



grafcontrolcsum.R

```

Cplus[1]<-0
Cplus[i+1]<-max(0,x[i]-(mu0+K)+Cplus[i])
}

H<-5*sd.proceso

plot(muestras,Cplus,type='l',xaxt='n',xlim=c(0,(length(x)+2)),
,col="darkblue",ylim=c(0,max(H,max(Cplus))+0.5))

axis(1,1:(length(x)+3),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=H,lty=2)
text((max(length(x))+6),H,paste('H=',H),pos=3,font=2,cex=0.8)

for(i in 1:length(x)){
  if(Cplus[i]>H) {
    points(muestras[i],Cplus[i],pch=4,col="red")
  }
  else{
    points(muestras[i],Cplus[i],pch=20)
  }
}

mtext('Cusum superior',side=3,font=2)
}

graf.controlcsumpos(x,10,1)

#Cusum tabular inferior

graf.controlcsumneg<-function(x,mu0,sd.proceso){
  corrimiento<-1*sd.proceso
  mu1<-mu0+corrimiento
  K<-(mu1-mu0)/2
  Cless<-x
  muestras<-1:length(x)

  for(i in 1:(length(x)-1)) {
    Cless[1]<-0
    Cless[i+1]<-max(0,(mu0-K)-x[i]+Cless[i])
  }

  H<-5*sd.proceso

  plot(muestras,Cless,type='l',xaxt='n',col="darkblue",xlim=c(0,(length(x)
)+2)),ylim=c(0,max(H,max(Cless))+0.5))

  axis(1,1:(length(x)+3),cex.axis=0.8,las=2)

  abline(h=H,lty=2)
  text((max(length(x))+6),H,paste('H=',H),pos=3,font=2,cex=0.8)

  for(i in 1:length(x)){
    if(Cless[i]>H) {
      points(muestras[i],Cless[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
      points(muestras[i],Cless[i],pch=20)
    }
  }
}

```

|   |   |
|---|---|
|   | <pre> }  mtext('Cusum inferior',side=3,font=2)  }  graf.controlcusumneg(x,10,1) </pre>  |
| <b>Gráficos de control no paramétricos univariantes</b> |   |
| <b>rangoordinal</b>                                     | <pre> #Rangos de profundidad  rangoprof&lt;-function(n){ r&lt;-vector(length=length(n))  for(i in 1:length(n)){  r[i]&lt;(2/length(n))*(min(sum(n[i]&lt;n),sum(n[i]&gt;n)))+ sum(n[i]==n)/length(n)  }  r  }  r&lt;-rangoprof(x1) </pre>  |
| <b>grafcontrolrQuni.R</b>                               | <pre> #FASE 1  graf.control.rQ&lt;-function(r,k,alpha){  if(k==1){  central&lt;-0.5 LCL&lt;-alpha tiempo&lt;-1:length(r)  plot(tiempo,r,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,(length(r)+18)) ,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))  axis(1,seq(from=0, to=(length(r)),by=10),cex.axis=0.8,las=2)  abline(h=LCL,lty=2) text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=0.5,lty=2) text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8) )  for(i in 1:length(tiempo)){ if(r[i]&lt;LCL){ points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red") } else { </pre> |

grafcontrolrQuni.R

```

        points(tiempo[i],r[i],pch=20)
    }
}

mtext('Gráfico de control r',side=3,font=2)
}

if(k>=2){

    x<-matrix(r,nrow=k)
    central<-0.5
    tiempo<-1:ncol(x)
    medias<-c(apply(x,2,mean))
    r<-medias
    zalfa<-qnorm(1-alpha,0,1)

    if(k<5){
        LCL<-((factorial(nrow(x))*alpha)^(1/nrow(x)))/nrow(x)
    }

    if(k>=5){
        LCL<-0.5-zalfa*(1/(sqrt(12*nrow(x))))
    }

plot(tiempo,r,type='l',xaxt='n',col="darkblue",xlim=c(0,(length(r)+18))
,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))

    axis(1,1:(length(r)),cex.axis=0.8,las=2)

    abline(h=LCL,lty=2)
    text((max(tiempo)+6),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

    abline(h=0.5,lty=2)
    text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8
)

    for(i in 1:length(tiempo)){
        if(r[i]<LCL){
            points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red")
        }
        else {
            points(tiempo[i],r[i],pch=20)
        }
    }

mtext('Gráfico de control Q',side=3,font=2)
}
}

#Para dibujar la gráfica de control Q hay que indicar el valor de
#K(tamaño muestral) y alpha

graf.control.rQ(r,5,0.01)

#Para dibujar la gráfica de control r hay que indicar el valor de
#K(tamaño muestral) y el de alpha

graf.control.rQ(r,1,0.01)

```

grafcontrolrQuni.R

```
#FASE 2

#Union de ambos datos

x<-cbind(t(x1),t(x2))

graf.control.rQ2<-function(r,k,alpha,LCL){

  if(k==1){

    central<-0.5
    tiempo<-1:length(r)

    plot(tiempo,r,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,(length(r)+18))
    ,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))

    axis(1,seq(from=0, to=(length(r)),by=10),cex.axis=0.8,las=2)

    abline(h=LCL,lty=2)
    text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

    abline(h=0.5,lty=2)
    text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8
    )

    for(i in 1:length(tiempo)){
      if(r[i]<LCL){
        points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red")
      }
      else {
        points(tiempo[i],r[i],pch=20)
      }
    }

    mtext('Gráfico de control r',side=3,font=2)

  }

  if(k>=2){

    x<-matrix(r,nrow=k)
    central<-0.5
    tiempo<-1:ncol(x)
    medias<-c(apply(x,2,mean))
    r<-medias
    zalfa<-qnorm(1-alpha,0,1)

    plot(tiempo,r,type='l',xaxt='n',col="darkblue",xlim=c(0,(length(r)+18))
    ,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))

    axis(1,1:(length(r)),cex.axis=0.8,las=2)

    abline(h=LCL,lty=2)
    text((max(tiempo)+6),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

    abline(h=0.5,lty=2)
    text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8
```

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| <p><b>grafcontrolrQuni.R</b></p> | <pre> )  for(i in 1:length(tiempo)){   if(r[i]&lt;LCL){     points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red")   }   else {     points(tiempo[i],r[i],pch=20)   } }  mtext('Gráfico de control Q',side=3,font=2)  }  }  #Para dibujar la gráfica de control Q hay que indicar el valor de K(tamaño muestral)y alpha  graf.control.rQ2(r,5,0.01,0.199669)  #Para dibujar la gráfica de control r hay que indicar el valor de K(tamaño muestral) y el de alpha  graf.control.rQ2(r,1,0.01,0.01) </pre>  |
| <p><b>grafcontrolSuni.R</b></p>  | <pre> #FASE I  grafcontrolS&lt;-function(r,alpha){    zalfa&lt;-qnorm(1-alpha,0,1)    if(length(r)&lt;=30){      LCL&lt;--(zalfa*sqrt(length(r)/12))     tiempo&lt;-1:length(r)     CL&lt;-0     b&lt;-c(r-1/2)     sumaacumulada&lt;-cumsum(b)      plot(tiempo,sumaacumulada,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,length(sumaacumulada)+20)),ylim=c(min(LCL,min(sumaacumulada))-0.5,max(sumaacumulada)+0.5))      axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)      abline(h=LCL,lty=2)     text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)      abline(h=CL,lty=2)     text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7)      for(i in 1:length(tiempo)){       if(sumaacumulada[i]&lt;LCL){         points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=4,col="red")       }     }   } } </pre> |

grafcontrolSuni.R

```

        else {
            points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=20)
        }
    }

mtext('Gráfico de control S',side=3,font=2)

}

if(length(r)>30){

    CL<-0
    tiempo<-1:length(r)
    LCL<--zalfa
    b<-c(r-1/2)
    sumaacumulada<-cumsum(b)
    Sn<-sumaacumulada/sqrt(length(r)/12)

    plot(tiempo,Sn,type='l',col="darkblue",xaxt='n',
        xlim=c(0,length(Sn)+20),ylim=c(min(LCL,min(Sn))-0.5,max(Sn)+0.5))

    axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)

    abline(h=LCL,lty=2)
    text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

    abline(h=CL,lty=2)
    text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7)

    for(i in 1:length(tiempo)){
        if(Sn[i]<LCL){
            points(tiempo[i],Sn[i],pch=4,col="red")
        }
        else {
            points(tiempo[i],Sn[i],pch=20)
        }
    }

mtext('Gráfico de control S*',side=3,font=2)

}

}

grafcontrolS(r,0.01)

#FASE II

x<-cbind(t(x1),t(x2))
r<-rangoprof(x,x1)

grafcontrolS<-function(r,alpha,LCL){

    zalfa<-qnorm(1-alpha,0,1)

    if(length(r)<=30){
        tiempo<-1:length(r)
        CL<-0
        b<-c(r-1/2)
        sumaacumulada<-cumsum(b)
    }
}

```

grafcontrolSuni.R

```
plot(tiempo,sumaacumulada,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,length(sumaacumulada)+20)),ylim=c(min(LCL,min(sumaacumulada))-0.5,max(sumaacumulada)+0.5))

axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=LCL,lty=2)
text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=CL,lty=2)
text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7)

for(i in 1:length(tiempo)){
  if(sumaacumulada[i]<LCL){
    points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=4,col="red")
  }
  else {
    points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=20)
  }
}

mtext('Gráfico de control S',side=3,font=2)
}

if(length(r)>30){

  CL<-0
  tiempo<-1:length(r)
  LCL<--zalfa
  b<-c(r-1/2)
  sumaacumulada<-cumsum(b)
  Sn<-sumaacumulada/sqrt(length(r)/12)

  plot(tiempo,Sn,type='l',col="darkblue",xaxt='n',
  xlim=c(0,length(Sn)+20)),ylim=c(min(LCL,min(Sn))-0.5,max(Sn)+0.5))

  axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)

  abline(h=LCL,lty=2)
  text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)

  abline(h=CL,lty=2)
  text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7)

  for(i in 1:length(tiempo)){
    if(Sn[i]<LCL){
      points(tiempo[i],Sn[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
      points(tiempo[i],Sn[i],pch=20)
    }
  }

  mtext('Gráfico de control S*',side=3,font=2)
}
}
```

|                          | <code>grafcontrolS(r,0.01,-2.326)</code>   |
|--------------------------|--|
| Gráficos multivariante   | Código gráficos de control multivariantes  |
| Funciones de profundidad | <pre> #Si se quiere utilizar la profundidad de Malahabenis profM&lt;-function(X,covZ,samplemean){    dato&lt;-vector(length=nrow(X))    for(i in 1:nrow(X)){     dato[i]&lt;-t(X[i,]-samplemean)%*%solve(covZ)%*%(X[i,]-samplemean)   }    MDx&lt;-1/(1+dato)  }  x&lt;-profM(X,covZ,samplemean)  #Si se quiere utilizar la profundidad de Tukey profT&lt;-function(X){   dato&lt;-vector(length=nrow(X))    for(i in 1:nrow(X)){     dato[i]&lt;-depth(X[i,],Z,method="Tukey")   }    x&lt;-dato  }  x&lt;-profT(X)  #Si se quiere utilizar la profundidad de Liu profL&lt;-function(X){    dato&lt;-vector(length=nrow(X))    for(i in 1:nrow(X)){     dato[i]&lt;-depth(X[i,],Z,method="Liu")   }    x&lt;-dato  }  x&lt;-profL(X) </pre> |
| rangomultivariante       | <pre> rangoprof&lt;-function(D){    r&lt;-vector(length=length(D))    for(i in 1:length(D)){     r[i]&lt;-(sum(D[i]&lt;=D))/length(D)   }  } </pre>  |



|                 |   |
|-----------------|---|
|                 | <pre> r} r&lt;-rangoprof(x) </pre>  |
| grafcontrolrQ.R | <pre> graf.control.rQ&lt;-function(r,n,alpha){    k&lt;-n    if(k==1){      central&lt;-0.5     LCL&lt;-alpha     tiempo&lt;-1:length(r)      plot(tiempo,r,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,(length(r)+18))     ,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))      axis(1,seq(from=0, to=(length(r)),by=10),cex.axis=0.8,las=2)      abline(h=LCL,lty=2)     text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)      abline(h=0.5,lty=2)     text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8     )      for(i in 1:length(tiempo)){       if(r[i]&lt;LCL){         points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red")       }       else {         points(tiempo[i],r[i],pch=20)       }     }      mtext('Gráfico de control r',side=3,font=2)    }    if(k&gt;=2){      x&lt;-matrix(r,nrow=k)     central&lt;-0.5     tiempo&lt;-1:ncol(x)     medias&lt;-c(apply(x,2,mean))     r&lt;-medias     zalfa&lt;-qnorm(1-alpha/2,0,1)      if(k&lt;5){       LCL&lt;-((factorial(nrow(x))*alpha)^(1/nrow(x)))/nrow(x)     }      if(k&gt;=5){       LCL&lt;-0.5-zalfa*(1/(sqrt(12*nrow(x))))     }      plot(tiempo,r,type='l',xaxt='n',col="darkblue",xlim=c(0,(length(r)+18))     ,ylim=c(min(LCL,min(r))-0.005,max(r)+0.05))      axis(1,1:(length(r)),cex.axis=0.8,las=2) </pre> |

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| <p><b>grafcontrolrQ.R</b></p>     | <pre> abline(h=LCL,lty=2) text((max(tiempo)+6),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)  abline(h=0.5,lty=2) text((max(tiempo)+6),central,paste('central=',0.5),pos=3,font=2,cex=0.8)  for(i in 1:length(tiempo)){   if(r[i]&lt;LCL){     points(tiempo[i],r[i],pch=4,col="red")   }   else {     points(tiempo[i],r[i],pch=20)   } }  mtext('Gráfico de control Q',side=3,font=2)  }  }  #Para dibujar la gráfica de control Q hay que indicar el valor de #K(tamaño muestral), alpha y zalfa  graf.control.rQ(r,4,0.025)  #Para dibujar la gráfica de control r hay que indicar el valor de K(tamaño muestral) y el de alpha  graf.control.rQ(r,1,0.025) </pre>   |
| <p><b>grafcontrolSySast.R</b></p> | <pre> #Función gráfico de control  grafcontrolS&lt;-function(r,alfa){    zalfa&lt;-qnorm(1-alfa/2,0,1)    if(length(r)&lt;=30){      LCL&lt;--(zalfa*sqrt(length(r)/12))     tiempo&lt;-1:length(r)     CL&lt;-0     b&lt;-c(r-1/2)     sumaacumulada&lt;-cumsum(b)      plot(tiempo,sumaacumulada,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,length(sumaacumulada)+20)),ylim=c(min(LCL,min(sumaacumulada))-0.5,max(sumaacumulada)+0.5))      axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)      abline(h=LCL,lty=2)     text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)      abline(h=CL,lty=2)     text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7) </pre> |

|                            |   |
|----------------------------|---|
| <p>grafcontrolSySast.R</p> | <pre> for(i in 1:length(tiempo)){   if(sumaacumulada[i]&lt;LCL){     points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=4,col="red")   }   else {     points(tiempo[i],sumaacumulada[i],pch=20)   } }  mtext('Gráfico de control S',side=3,font=2) }  if(length(r)&gt;30){    CL&lt;-0   tiempo&lt;-1:length(r)   LCL&lt;--zalfa   b&lt;-c(r-1/2)   sumaacumulada&lt;-cumsum(b)   Sn&lt;-sumaacumulada/sqrt(length(r)/12)    plot(tiempo,Sn,type='l',col="darkblue",xaxt='n',         xlim=c(0,length(Sn)+20),ylim=c(min(LCL,min(Sn))-0.5,max(Sn)+0.5))    axis(1,seq(from=0, to=(length(r)+6),by=10),cex.axis=0.8,las=2)    abline(h=LCL,lty=2)   text((max(tiempo)+10),LCL,paste('LCL=',LCL),pos=3,font=2,cex=0.8)    abline(h=CL,lty=2)   text((max(tiempo)+10),CL,paste('CL=',CL),pos=3,font=2,cex=0.7)    for(i in 1:length(tiempo)){     if(Sn[i]&lt;LCL){       points(tiempo[i],Sn[i],pch=4,col="red")     }     else {       points(tiempo[i],Sn[i],pch=20)     }   }    mtext('Gráfico de control S*',side=3,font=2) } }  grafcontrolS(r,0.025) </pre> |
| <p>grafcontrolT2.R</p>     | <pre> graf.control.T2&lt;-function(X,alfa,k){    if(k&gt;1){      medias&lt;-apply(X,2,mean)     covarianzas&lt;-cov(X)     T2&lt;-vector(length=nrow(X))     muestras&lt;-1:nrow(X) </pre>   |

grafcontrolT2.R

```

for(i in 1:(nrow(X))){
  T2[i]<-t(X[i,]-medias)%*%solve(covarianzas)%*(X[i,]-medias)
}
T2

LCS<-((ncol(X)*(nrow(X)-1)*(k-1))/(nrow(X)*k-nrow(X)-
ncol(X)+1))*qf(alfa,ncol(X),1,nrow(X)*k-nrow(X)-ncol(X)+1)
LCI<-0

plot(muestras,T2,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,
(length(T2)+18)),ylim=c(min(LCI,min(T2))-0.5,max(max(T2),LCS)+0.05))

axis(1,seq(from=0,to=length(T2),by=2),cex.axis=0.8,las=2)

abline(h=LCS,lty=2)
text((max(muestras)+10),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

abline(h=LCI,lty=2)
text((max(muestras)+10),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

for(i in 1:length(muestras)){
  if((T2[i]<LCI)|(T2[i]>LCS)){
    points(muestras[i],T2[i],pch=4,col="red")
  }
  else{
    points(muestras[i],T2[i],pch=20)
  }
}

mtext('Gráfico de control T2',side=3,font=2)
}

if(k==1){

  if(nrow(X)<=100){

    medias<-apply(X,2,mean)
    covarianzas<-cov(X)
    T2<-vector(length=nrow(X))
    muestras<-1:nrow(X)

    for(i in 1:(nrow(X))){
      T2[i]<-t(X[i,]-medias)%*%solve(covarianzas)%*(X[i,]-medias)
    }
    T2
    LCS<-((ncol(X)*(nrow(X)+1)*(nrow(X)-1))/(nrow(X)*nrow(X)-
nrow(X)*ncol(X)))*qf(alfa,ncol(X),1,nrow(X)-ncol(X))
    LCI<-0

    plot(muestras,T2,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,(length(T2)+
18)),
    ylim=c(min(LCI,min(T2))-0.5,max(max(T2),LCS)+0.05))

    axis(1,seq(from=0,to=length(T2),by=2),cex.axis=0.8,las=2)

    abline(h=LCS,lty=2)
    text((max(muestras)+10),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

    abline(h=LCI,lty=2)
  }
}

```

grafcontrolT2.R

```

text((max(muestras)+10),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

for(i in 1:length(muestras)){

  if((T2[i]<LCI)|(T2[i]>LCS)){
    points(muestras[i],T2[i],pch=4,col="red")
  }
  else {
    points(muestras[i],T2[i],pch=20)
  }
}

mtext('Gráfico de control T2',side=3,font=2)
}

if(nrow(X)>100){

  medias<-apply(X,2,mean)
  covarianzas<-cov(X)
  T2<-vector(length=nrow(X))
  muestras<-1:nrow(X)

  for(i in 1:(nrow(X))){
    T2[i]<-t(X[i,]-medias)%*%solve(covarianzas)%*%(X[i,]-medias)
  }

  T2

  LCS<-(((nrow(X)-1)^2)/nrow(X))*q((1-alfa),(ncol(X)/2),(nrow(X)-
ncol(X)-1)/2)
  LCI<-0

plot(muestras,T2,type='l',col="darkblue",xaxt='n',xlim=c(0,(length(T2)+
18)),ylim=c(min(LCI,min(T2))-0.5,max(max(T2),LCS)+0.05))

  axis(1,seq(from=0,to=length(T2),by=2),cex.axis=0.8,las=2)

  abline(h=LCS,lty=2)
  text((max(muestras)+10),LCS,paste('LCS=',LCS),pos=3,font=2,cex=0.8)

  abline(h=LCI,lty=2)
  text((max(muestras)+10),LCI,paste('LCI=',LCI),pos=3,font=2,cex=0.8)

  for(i in 1:length(muestras)){
    if((T2[i]<LCI)|(T2[i]>LCS)){
      points(muestras[i],T2[i],pch=4,col="red")
    }
    else {
      points(muestras[i],T2[i],pch=20)
    }
  }

mtext('Gráfico de control T2',side=3,font=2)
}
}

```

```
}  
graf.control.T2(X,0.001,10)
```

### Curvas de operación característica (OC)

curvaOCmedia.R

```
k<-c(seq(from=0,to=5,by=0.005))  
  
beta1<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta1<-pnorm(3-k*sqrt(1))-pnorm(-3-k*sqrt(1))  
}  
  
beta2<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta2<-pnorm(3-k*sqrt(2))-pnorm(-3-k*sqrt(2))  
}  
  
beta3<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta3<-pnorm(3-k*sqrt(3))-pnorm(-3-k*sqrt(3))  
}  
  
beta4<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta4<-pnorm(3-k*sqrt(4))-pnorm(-3-k*sqrt(4))  
}  
  
beta5<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta5<-pnorm(3-k*sqrt(5))-pnorm(-3-k*sqrt(5))  
}  
  
beta6<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta6<-pnorm(3-k*sqrt(10))-pnorm(-3-k*sqrt(10))  
}  
  
beta7<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta7<-pnorm(3-k*sqrt(15))-pnorm(-3-k*sqrt(15))  
}  
  
beta8<-vector(length=length(k))  
for(i in 1:length(k)){  
  beta8<-pnorm(3-k*sqrt(20))-pnorm(-3-k*sqrt(20))  
}  
  
plot(k,beta1,type='l',col="darkblue")  
lines(k,beta2,col="red")  
lines(k,beta3,col="green")  
lines(k,beta4,col="yellow")  
lines(k,beta5,col="black")  
lines(k,beta6,col="purple")  
lines(k,beta7,col="blue")  
lines(k,beta8,col="orange")  
leg.txt <- c("n=1", "n=2", "n=3", "n=4", "n=5", "n=10", "n=15", "n=20")  
colores<-  
c("darkblue","red","green","yellow","black","purple","blue","orange")
```

|            |  |
|------------|--|
|            | <pre> legend(4,1,leg.txt,fill=colores) </pre>  |
| curvaOCR.R | <pre> #Curva OC 3sigma para R  graf.beta&lt;-function(n){    if(n==2){d2&lt;-1.128;d3&lt;-0.853;D1&lt;-0;D2&lt;-3.686}   if(n==3){d2&lt;-1.693;d3&lt;-0.888;D1&lt;-0;D2&lt;-4.358}   if(n==4){d2&lt;-2.059;d3&lt;-0.880;D1&lt;-0;D2&lt;-4.698}   if(n==5){d2&lt;-2.326;d3&lt;-0.864;D1&lt;-0;D2&lt;-4.918}   if(n==10){d2&lt;-3.078;d3&lt;-0.797;D1&lt;-0.687;D2&lt;-5.469}   if(n==15){d2&lt;-3.472;d3&lt;-0.756;D1&lt;-1.203;D2&lt;-5.741}   if(n==20){d2&lt;-3.735;d3&lt;-0.729;D1&lt;-1.549;D2&lt;-5.921}    k&lt;-c(seq(from=0,to=5,by=0.005))   beta&lt;-vector(length=length(k))    for(i in 1:length(k)){     beta&lt;-pnorm(((D2)/k)-d2)/d3)-pnorm(((D1)/k)-d2)/d3)   }    plot(k,beta,type='l',col="darkblue")  }  graf.beta(5) </pre> |
| curvaOCS.R | <pre> #Curva OC 3sigma para S  graf.beta&lt;-function(n){    if(n==2){C4&lt;-0.7979;B5&lt;-0;B6&lt;-2.606}   if(n==3){C4&lt;-0.8862;B5&lt;-0;B6&lt;-2.276}   if(n==4){C4&lt;-0.9213;B5&lt;-0;B6&lt;-2.088}   if(n==5){C4&lt;-0.9400;B5&lt;-0;B6&lt;-1.964}   if(n==10){C4&lt;-0.9727;B5&lt;-0.276;B6&lt;-1.669}   if(n==15){C4&lt;-0.9823;B5&lt;-0.421;B6&lt;-1.544}   if(n==20){C4&lt;-0.9869;B5&lt;-0.504;B6&lt;-1.470}    k&lt;-c(seq(from=0,to=5,by=0.005))   beta&lt;-vector(length=length(k))    for(i in 1:length(k)){     beta&lt;-pnorm((B6-C4*k)/(k*sqrt(1-C4*C4)))-pnorm((B5-C4*k)/(k*sqrt(1-C4*C4)))   }    plot(k,beta,type='l',col="red")  }  graf.beta(10) </pre>   |

|                    |   |
|--------------------|---|
|                    |   |
| curvaOCQ.R         | <pre> graf.beta&lt;-function(k,alfa){    lamda&lt;-c(seq(from=0,to=2,by=0.005))   beta&lt;-vector(length=length(lamda))    for(i in 1:length(lamda)){     beta&lt;-1-pnorm((((factorial(k)*alfa)^(1/k))/k)-0.5+lamda)/(1/(12*k)))   }    plot(lamda,beta,type='l',col="darkblue")  }  graf.beta(5,0.0027) </pre>                      |
| curvaOCSLiu.R      | <pre> graf.beta&lt;-function(k,alfa){    zalfa&lt;-zalfa&lt;-qnorm(1-alfa/2,0,1)   lamda&lt;-c(seq(from=0,to=5,by=0.005))   beta&lt;-vector(length=length(lamda))    for(i in 1:length(lamda)){     beta&lt;-1-pnorm((-zalfa*sqrt(k/12)+lamda)/(k/12))   }    plot(lamda,beta,type='l',col="darkblue")  }  graf.beta(5,0.0027) </pre> |
| OC_normal_x-barQ.R | <pre> alpha=0.05  # para el gráfico Q, tamaño muestral 5 LC=0.287650309862269  # 10000 observaciones iniciales x=rnorm(10000)  # simulo 10000 muestras de tamaño 5  k=10000 n=5  # la alteración en la media va a ser de magnitud ppp ppp=seq(0,5,by=0.2) oc=vector(length=length(ppp)) </pre>  |



|                                |  |
|--------------------------------|--|
| <p>OC_normal_x-barQ.R</p>      | <pre> for(ind in 1:length(ppp)){    out=0    for(i in 1:k){      y=rnorm(n)+ppp[ind]     r=vector(length=n) # para cada una de las muestras calculo el rango de sus 5 observaciones #respecto de las 10000 observaciones iniciales      for(j in 1:n) {       r[j]&lt;- (2/length(x))*(min(sum(y[j]&lt;x),sum(y[j]&gt;x)))+sum(y[j]==x)/length(x)     }  # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los límites de control      if(mean(r)&lt;LC){out=out+1}   }    oc[ind]=1-out/k  }  pp&lt;-c(seq(from=0,to=5,by=0.01))  beta5&lt;-vector(length=length(pp))    for(i in 1:length(pp)){      beta5&lt;-pnorm(1.96-pp*sqrt(5))-pnorm(-1.96-pp*sqrt(5))    }  plot(pp,beta5,type='l',col="black")  points(ppp,oc,type='l',col="red")  leg.txt &lt;- c("Shewart", "Q") colores&lt;-c("black","red")  legend(4,.9,leg.txt,fill=colores) </pre> |
| <p>OC_exponencial_x-barQ.R</p> | <pre> alpha=0.05  # para el gráfico Q, tamaño muestral 5  LC=0.287650309862269  # 10000 observaciones iniciales  x=rexp(10000,rate=1)  # Para construir el gráfico X-bar de Shewart basado en rangos # media total  ave=mean(x) range=vector(length=10000/5) </pre>  |

OC\_exponencial\_x-  
barQ.R

```
for(i in 1:(10000/5)){range=max(x[((i-1)*5+1):(i*5)])-min(x[((i-1)*5+1):(i*5)])}

# random medio para muestras de 5 observaciones

aveR=mean(range)
d2=2.326
LCI=ave-1.96*aveR/(d2*sqrt(5))
LCS=ave+1.96*aveR/(d2*sqrt(5))

# simulo 10000 muestras de tamaño 5

k=10000
n=5

#la alteración en la media va a ser de magnitud pp

pp=seq(-1,3,by=0.2)
ocshe=vector(length=length(pp))
ocQ=vector(length=length(pp))

for(ind in 1:length(pp)){
  outQ=0
  outshe=0

  for(i in 1:k){
    y=rexp(n,rate=1)+pp[ind]
    r=vector(length=n)

    # para cada una de las muestras calculo el rango de sus 5 observaciones
    #respecto de las 10000 observaciones iniciales

    for(j in 1:n) {
      r[j]<-
      (2/length(x))*(min(sum(y[j]<x),sum(y[j]>x))+sum(y[j]==x)/length(x))
    }

    # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los límites de
    control Q

    if(mean(r)<LC){outQ=outQ+1}

    # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los límites de
    #control Shewart

    if(mean(y[j])<LCI || mean(y[j])>LCS){outshe=outshe+1}
  }

  ocQ[ind]=1-outQ/k
  ocshe[ind]=1-outshe/k
}

plot(pp,ocQ,type='l',col="red")

points(pp,ocshe,type='l',col="black")

leg.txt <- c("Shewart", "Q")
colores<-c("black","red")

legend(2.2,1,leg.txt,fill=colores)
```

normaxyr.R

```
alpha=0.05

# para el gráfico r, tamaño muestral 1
LC=0.05

# 10000 observaciones iniciales
x=rnorm(10000)

# simulo 10000 muestras de tamaño 1
k=10000
n=1

# la alteración en la media va a ser de magnitud ppp

ppp=seq(0,5,by=0.2)
oc=vector(length=length(ppp))

for(ind in 1:length(ppp)){

  out=0

  for(i in 1:k){

    y=rnorm(n)+ppp[ind]
    r=vector(length=n)

    # para cada una de las muestras calculo el rango de sus 5
    #observaciones respecto de las 10000 observaciones iniciales

    for(j in 1:n) {

      r[j]<-
      (2/length(x))*(min(sum(y[j]<x),sum(y[j]>x))+sum(y[j]==x)/length
      (x))
    }

    # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los
    límites de control
    if(r<LC){out=out+1}
  }
  oc[ind]=1-out/k
}
pp<-c(seq(from=0,to=5,by=0.01))
beta1<-vector(length=length(pp))

for(i in 1:length(pp)){

  beta1<-pnorm(1.96-pp*sqrt(1))-pnorm(-1.96-pp*sqrt(1))

}
plot(pp,beta1,type='l',col="black")
points(ppp,oc,type='l',col="red")
leg.txt <- c("Shewhart", "r")
colores<-c("black","red")
legend(4,.9,leg.txt,fill=colores)
```

expxyr.R

```
alpha=0.05

# para el gráfico r, tamaño muestral 1
LC=0.05 # 10000 observaciones iniciales

x=rexp(10000,rate=1)

# Para construir el gráfico X de Shewart basado en rangos
# media total

ave=mean(x)
desv=sd(x)
LCI=ave-1.96*desv
LCS=ave+1.96*desv

# simulo 10000 muestras de tamaño 1
k=10000
n=1

#la alteración en la media va a ser de magnitud pp

pp=seq(-1,3,by=0.2)
ocshe=vector(length=length(pp))
ocr=vector(length=length(pp))
for(ind in 1:length(pp)){
  outQ=0
  outshe=0
  for(i in 1:k){
    y=rexp(n,rate=1)+pp[ind]
    r=vector(length=n)
    # para cada una de las muestras calculo el rango de sus
    observaciones respecto
    # de las 10000 observaciones iniciales
    for(j in 1:n) {
      r[j]<-
      (2/length(x))*(min(sum(y[j]<x),sum(y[j]>x))+sum(y[j]==x)/length
      (x)
    }
    # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los
    #límites de control r

    if(r<LC){outQ=outQ+1}

    # calculo la cantidad de promedios de rangos fuera de los
    límites de control Shewart
    if((mean(y[j])<LCI)|(mean(y[j])>LCS)) {outshe=outshe+1}
  }
  ocr[ind]=1-outQ/k
  ocshe[ind]=1-outshe/k
}
plot(pp,ocr,type='l',col="red")
points(pp,ocshe,type='l',col="black")
leg.txt <- c("Shewhart", "r")
colores<-c("black","red")
legend(2.2,1,leg.txt,fill=colores)
```

**Anexo IV: Datos para la simulación**

*Gráficos de control para la media, R y S. Gráficos de control univariantes r, Q y S de Liu*

```
#Para el gráfico de control para la media y rango he cogido los  
#datos recogidos en una tabla del libro de "Control Estadístico  
#de la Calidad. Montgomery" página 213. Los anillos de un motor  
#de automóvil se producen mediante un proceso de fundición.  
#Para realizar el control estadístico del diámetro interior de  
#los anillos fabricados tomamos 25 muestras, cada una de tamaño  
#5, cuando se considera que el proceso está bajo control. Una  
#vez se establece un conjunto de límites de control confiables,  
#el gráfico de control se usa para monitorear la producción  
#futura (fase 2), para lo cual se toman 15 muestras de tamaño 5
```

```
#Datos fase 1
```

```
x1<-c(74.030,74.002,74.019,73.992,74.008,73.995,73.992,74.001,  
74.011,74.004,73.988,74.024,74.021,74.005,74.002,74.002,73.996,7  
3.993,74.015,74.009,73.992,74.007,74.015,73.989,74.014,74.009,73  
.994,73.997,73.985,73.993,73.995,74.006,73.994,74.000,74.005,73.  
985,74.003,73.993,74.015,73.988,74.008,73.995,74.009,74.005,74.0  
04,73.998,74.000,73.990,74.007,73.995,73.994,73.998,73.994,73.99  
5,73.990,74.004,74.000,74.007,74.000,73.996,73.983,74.002,73.998  
,73.997,74.012,74.006,73.967,73.994,74.000,73.984,74.012,74.014,  
73.998,73.999,74.007,74.000,73.984,74.005,73.998,73.996,73.994,7  
4.012,73.986,74.005,74.007,74.006,74.010,74.018,74.003,74.000,73  
.984,74.002,74.003,74.005,73.997,74.000,74.010,74.013,74.020,74.  
003,73.982,74.001,74.015,74.005,73.996,74.004,73.999,73.990,74.0  
06,74.009,74.010,73.989,73.990,74.009,74.014,74.015,74.008,73.99  
3,74.000,74.010,73.982,73.984,73.995,74.017,74.013)
```

```
# Datos fase 2 (monitorización de la producción futura) se toman  
#15 muestras de tamaño 5
```

```
x2<-c(74.012,74.015,74.030,73.986,74.000,73.995,74.010,73.990,  
74.015,74.001,73.987,73.999,73.985,74.000,73.990,74.008,74.010,7  
4.003,73.991,74.006,74.003,74.000,74.001,73.986,73.997,73.994,74  
.003,74.015,74.020,74.004,74.008,74.002,74.018,73.995,74.005,74.  
001,74.004,73.990,73.996,73.998,74.015,74.000,74.016,74.025,74.0  
00,74.030,74.005,74.000,74.016,74.012,74.001,73.990,73.995,74.01  
0,74.024,74.015,74.020,74.024,74.005,74.019,74.035,74.010,74.012  
,74.015,74.026,74.017,74.013,74.036,74.025,74.026,74.010,74.005,  
74.029,74.000,74.020)
```

### *Gráfico de control CUSUM*

```
#Tomando los datos de la tabla de la página 407 del libro  
#"Control estadístico de la calidad" de Montgomery se procede a  
#notar la diferencia entre el uso de una gráfica clásica (medias)  
#y una gráfica de sumas acumuladas. En este ejemplo en concreto  
#tomamos 20 observaciones aleatorias con media 10 (x1) y  
#desviación estandar 1 y otras 10 observaciones aleatorias con  
#media 11 y desviación estándar 1 (x2).
```

```
x1<-c(9.45,7.99,9.29,11.66,12.16,10.18,8.04,11.46,9.20,10.34,  
9.03,11.47,10.51,9.40,10.08,9.37,10.62,10.31,8.52,10.84)
```

```
x2<-c(10.90,9.33,12.29,11.50,10.60,11.08,10.38,11.62,11.31,  
10.52)
```

```
x<-cbind(t(x1),t(x2))
```

### *Gráficos de control multivariante $r$ , $Q$ y $S$ de Liu*

```
mu1<-c(0,0)  
sigma1<-matrix(c(1,0,0,1),ncol=2)  
Z<-mvrnorm(540,mu1,sigma1)  
Y<-(Z[-c(501:540),])  
X1<-Z[-c(1:500),]
```

```
samplemean<-apply(Z,2,mean)  
covZ<-cov(Z)
```

```
mu2<-c(2,2)  
sigma2<-matrix(c(2,0,0,2),ncol=2)  
X2<-mvrnorm(40,mu2,sigma2)
```

```
X2<-t(X2)  
X1<-t(X1)  
X<-cbind(X1,X2)  
X<-t(X)
```

### *Gráficos de control $T^2$ de Hotelling*

```
#Ejemplo pag 518 Montgomery
```

```
#Datos de medias muestrales de tamaño k=10
```

```
x1<-c(115.25,115.91,115.05,116.21,115.90,115.55,114.98,115.25,  
116.15,115.92,115.75,114.90,116.01,115.83,115.29,115.63,115.47,1  
15.58,115.72,115.40)
```

```
x2<-c(1.04,1.06,1.09,1.05,1.07,1.06,1.05,1.10,1.09,1.05,0.99,  
1.06,1.05,1.07,1.11,1.04,1.03,1.05,1.06,1.04)
```

```
X<-cbind(x1,x2)
```

```
#Datos de otro ejemplo de observaciones individuales (k=1)
```

```
library(MASS)
```

```
mu<-c(50,135)
```

```
covaria<-matrix(c(16,0,0,20),ncol=2)
```

```
X<-mvrnorm(30,mu,covaria)
```

### *Comparativa entre el gráfico T2 de Hotelling y el r de Liu*

```
x1<-rexp(200,0.5)
```

```
Z<-matrix(x1,ncol=2)
```

```
Y1<-Z[-c(1:60),]
```

```
x2<-rexp(80,4)
```

```
Y2<-matrix(x2,ncol=2)
```

```
X<-cbind(t(Y1),t(Y2))
```

```
X<-t(X)
```

```
samplemean<-apply(Z,2,mean)
```

```
covZ<-cov(Z)
```

## Anexo V: Curva característica de operación para gráficos de control $S$

Para construir la curva característica de operación para el gráfico de control  $S$ , se usa la distribución de  $S$ . Al igual que en el caso anterior para detectar un cambio hacia un nuevo valor de  $S$ , definimos el parámetro  $k$  como  $\lambda = S_1/S_0 = \sigma_1/\sigma_0$  para los distintos tamaños muestrales.

Sabemos que la distribución  $S$  sigue una distribución normal y que  $\frac{S - C_4\sigma_1}{\sigma_1\sqrt{1 - C_4^2}} \sim N(0,1)$ . Los límites de control del gráfico  $S$  son  $LCI = B_5\sigma_0$  y  $LCS = B_6\sigma_0$ .

$$\begin{aligned} \beta &= P\{LCI \leq S \leq LCS\} = P\{B_5\sigma_0 \leq S \leq B_6\sigma_0\} = P\{B_5\sigma_0 - C_4\sigma_1 \leq S - C_4\sigma_1 \leq B_6\sigma_0 - C_4\sigma_1\} \\ &= P\{(B_5\sigma_0 - C_4\lambda\sigma_0)/(\lambda\sigma_0\sqrt{1 - C_4^2}) \leq (S - C_4\lambda\sigma_0)/(\lambda\sigma_0\sqrt{1 - C_4^2}) \leq (B_6\sigma_0 - C_4\lambda\sigma_0)/(\lambda\sigma_0\sqrt{1 - C_4^2})\} \\ &= P\{(B_5 - C_4\lambda)/(\lambda\sqrt{1 - C_4^2}) \leq Z \leq (B_6 - C_4\lambda)/(\lambda\sqrt{1 - C_4^2})\} \end{aligned}$$

$$\beta = P\{Z \leq (B_6 - C_4\lambda)/(\lambda\sqrt{1 - C_4^2})\} - P\{Z \leq (B_5 - C_4\lambda)/(\lambda\sqrt{1 - C_4^2})\}$$

Donde los parámetros  $B_5$ ,  $B_6$  y  $C_4$  vienen tabulados en la tabla I del Anexo I para diferentes tamaños muestrales.

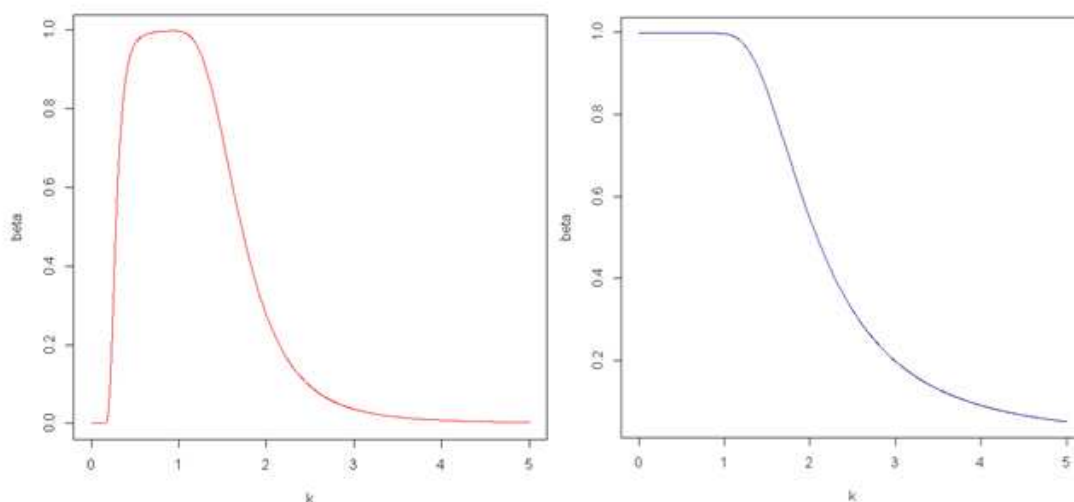


Figura 29: “Curva OC para el gráfico de control  $S$  para tamaños muestrales 10 y 5”